Różne kule, różne geometrie

Marek KORDOS, Warszawa*

Geometria, za pomocą której stworzona została cała nasza cywilizacja, dopiero w połowie XIX wieku została określona epitetem „euklidesowa”. Stało się tak, bowiem spostrzeżono, że istnieje bardzo podobna, posługująca się właściwie tym samym językiem teoria, mająca cały szereg twierdzeń innych niż w klasycznej geometrii (np. istnieją trójkąty, w których wysokości nie przecinają się). Dziś tę geometrię nazywamy nazwiskami Bolyaia i Łobaczewskiego.

W tym samym momencie uświadomiono sobie, że przecież już od Starożytności uprawiano teorię opisującą sferę niebieską, i nie było widać powodu, by ją miana „geometria” pozbawiać. Podobnie teoria opisana przez Gaussa w *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, znana dziś jako geometria wewnętrzna, na nazwę gatunkową „geometria” zasługiwała (pewności nie było: np. jej proste nazywamy do dziś geodezyjnymi).

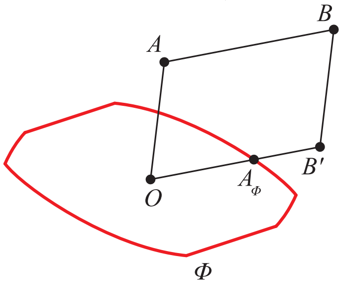
Nic przeto dziwnego, że Gauss zobligował Bernharda Riemanna do odpowiedzenia na pytanie, co to takiego, co zawierają w sobie, czym wyróżniają się wszelkie możliwe geometrie. I wykład habilitacyjny Riemanna (1854) na to pytanie bardzo precyzyjnie i jednoznacznie odpowiedział. Geometria to teoria powstała przez podanie metryki na dowolnej rozmaitości.

Bernhard Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*; po polsku można tę pracę *O hipotezach leżących u podstaw geometrii* znaleźć w „Matematyce–Społeczeństwie–Nauczaniu” nr 4 (na przykład na stronie Szkół Matematyki Poglądowej).

Oczywiście w XX wieku termin „geometria” wydatnie rozszerzono, jednak większość matematyków (i my w tym artykule) przy riemannowskim rozumieniu terminu „geometria” pozostała.

W szczególności Hermann Minkowski zaprojektował całą rodzinę geometrii w przestrzeniach $\mathbb{R}^k$. Niech Φ będzie brzegiem środkowo symetrycznego ciała wypukłego w $\mathbb{R}^k$. Aby zmierzyć odcinek AB, przesuwamy go tak, by A pokryło się ze środkiem O. Półprosta z O przez nowe położenie B – punkt B' – przecina Φ w punkcie A_Φ. Związana z Φ metryka to

$$\rho_\Phi(AB) = \frac{|OB'|}{|OA_\Phi|}.$$



Rys. 1

Jak łatwo zauważyć, jest to stosunek podziału odcinka OB' (wewnętrzny, jak na rysunku, lub zewnętrzny) przez Φ, a że podział odcinka jest niezmiennikiem afinicznym, jest to dobrze określona liczba.

Zanim zrobimy przegląd różnych pozyskanych w ten sposób geometrii, spójrzmy, do jakich przemyśleń skłonił Hilberta ten pomysł. Jest to zawarte w jego IV problemie.

IV Problem Hilberta – według stenogramu

8 sierpnia 1900 roku, na posiedzeniu połączonych sekcji Historii i Bibliografii oraz Dydaktyki i Metodologii Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Paryżu, Dawid Hilbert wystąpił z wykładem „Problemy Matematyki”. W wykładzie tym przedstawił swoją wizję spraw, wokół których, jego zdaniem, grupować się będą badania matematyków w XX wieku. Stenogram z tego posiedzenia wymienia 23 problemy i stwierdza, że było ich więcej, ale w kilku przypadkach wśród obecnych na sali znaleźli się znający rozwiązania.

Intuicja Hilberta okazała się zdumiewająco trafna – rzeczywiście matematyka XX wieku poszła po wskazanych przez niego szlakach. Może jedynie topologia i teoria układów dynamicznych nie wyrastały w czysty sposób ze wskazanych przez Hilberta korzeni.

Jeśli z całego układu aksjomatów, koniecznych do zbudowania zwykłej geometrii euklidesowej, odrzucimy aksjomat o równoległych i przyjmiemy, że wszystkie pozostałe aksjomaty są spełnione, a ten aksjomat nie jest spełniony, to, jak wiadomo, otrzymamy geometrię Łobaczewskiego (czyli hiperboliczną). Dlatego możemy powiedzieć, że geometria ta jest, w pewnym sensie, najbliższa geometrii Euklidesa. Jeżeli następnie zażądamy, by nie był spełniony aksjomat mówiący, że spośród trzech punktów na jednej prostej dokładnie jeden leży między pozostałymi dwoma, to przejdziemy do geometrii Riemanna (czyli eliptycznej), którą, w tym sensie, można uznać za najbliższą geometrii Łobaczewskiego.

Jeżeli zechcemy przeprowadzić w analogiczny sposób rozważania dotyczące aksjomatu Archimedesa, to, przyjąwszy, że aksjomat ten nie jest spełniony, przejdziemy do geometrii niearchimedesowych, badanych przez Veronese'a i przeze mnie.

Powstaje przy tym bardziej ogólny problem, polegający na pytaniu, czy można, wychodząc z innych płodnych punktów widzenia, zbudować geometrie, które równie zasadnie mogłyby być uważane za najbliższe zwykłej euklidesowej geometrii.

Chciałbym przy tym zwrócić uwagę Państwa na jedno zdanie, przyjmowane nawet przez niektórych autorów za określenie linii prostej, zgodnie z którym linia prosta jest najkrótszym połączeniem dwóch punktów. Sens tego zdania sprowadza się w istocie do twierdzenia Euklidesa o tym, że suma dwóch boków trójkąta jest zawsze większa od trzeciego boku; jak łatwo zauważyć, twierdzenie to jest oparte tylko na pojęciach elementarnych, czyli takich, które można uzyskać bezpośrednio z aksjomatów i dlatego poddają się całkowicie badaniom logiki.

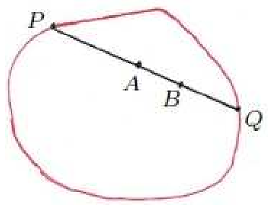
Euklides dowiódł tego twierdzenia o trójkącie za pomocą twierdzenia o kącie zewnętrznym, wykorzystując własności przystawania. Łatwo jednak przekonać się, że dla dowodu tego euklidesowego twierdzenia nie wystarczają własności przystawania mówiące o odkładaniu odcinków i kątów, lecz niezbędne jest jeszcze twierdzenie mówiące o równości trójkątów.

W ten sposób powstaje pytanie o taką geometrię, w której spełnione są wszystkie aksjomaty zwykłej geometrii euklidesowej i, w szczególności, wszystkie aksjomaty przystawania, z wyjątkiem jednego – aksjomatu przystawania trójkątów (albo założenia o równości kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego), ale w której przyjmuje się dodatkowo aksjomat, że w każdym trójkącie suma dwóch boków jest większa od trzeciego.

Okazuje się, że taka geometria rzeczywiście istnieje i jest to nic innego, jak geometria, którą stworzył Minkowski w swojej książce „Geometria liczb", i której użył za podstawę swoich badań arytmetycznych. W ten sposób geometria Minkowskiego jest również jedną z najbliższych zwykłej geometrii euklidesowej.

Podstawowe założenia tej geometrii są następujące. Po pierwsze, zbiór punktów równo oddalonych od danego punktu O przedstawia wypukłą i domkniętą powierzchnię ze środkiem symetrii w punkcie O w zwykłej przestrzeni euklidesowej. Po drugie, dwa odcinki uważamy za równe także i w tym przypadku, gdy jeden z nich może być nałożony na drugi za pomocą przesunięcia przestrzeni euklidesowej.

To, o czym w tym miejscu mówi Hilbert, nazywa się dziś geometriami Hilberta. Są to otwarte zbiory wypukłe z $\mathbb{R}^k$, w których metrykę określa się tak, jak w geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego:



$$\rho(AB) = \left| \ln \frac{|AQ| \cdot |BP|}{|AP| \cdot |BQ|} \right|.$$

Dla różnych zbiorów otwartych otrzymuje się różne geometrie. Zależności między kształtem tych zbiorów a własnościami otrzymanych geometrii bada się analogicznie do opisanych dalej rozważań o geometriach Minkowskiego.

Gdy zbiór, na którym określona jest geometria Hilberta, jest elipsą, geometria ta jest geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego.

W geometrii Minkowskiego spełniony jest aksjomat o równoległych. W jednej z prac, poświęconej zagadnieniu linii prostej jako najkrótszemu połączeniu dwóch punktów, udało mi się zbudować geometrię, w której nie jest spełniony aksjomat o równoległości, a wszystkie inne aksjomaty geometrii Minkowskiego są spełnione.

Uważam za bardzo pożądane zbudowanie i systematyczne zbadanie wszystkich możliwych takich geometrii ze względu na wielkie znaczenie, jakie ma założenie o prostej, jako najkrótszym połączeniu dwóch punktów i (w istocie równoważne mu) twierdzenie Euklidesa o bokach trójkąta nie tylko w teorii liczb, lecz także i w teorii powierzchni, i w rachunku wariacyjnym.

Wydaje się, że wszechstronne zbadanie sytuacji, w których to założenie jest spełnione, wniesie nowe światło zarówno w sprawę pojęcia odległości, jak również w sprawę innych pojęć elementarnych, na przykład pojęcie płaszczyzny i możliwości jej określenia za pomocą pojęcia prostej.

W przypadku płaszczyzny, jeśli przyjąć również aksjomat ciągłości, zarysowana problematyka prowadzi do zadania postawionego przez Darboux: znaleźć na płaszczyźnie wszystkie zadania wariacyjne, których rozwiązaniami są wszystkie proste tej płaszczyzny.

Takie postawienie pytania wydaje mi się sensowne i mające bardzo wiele daleko idących uogólnień.

IV Problem Hilberta – jak to rozumiano

Powszechnie sprowadzono to do pytania: jak wyglądają wszystkie przyzwoite (czyli dostatecznie podobne do klasycznej) geometrie?

I przeważnie odpowiadano: są to wszystkie możliwe metryzacje przestrzeni rzutowej lub jej wypukłych podzbiorów

(już Cayley mówił: *geometria rzutowa to cała geometria*).

Może analogia. Oczywiście, dowolny zbiór można zmetryzować (dając mu choćby metrykę dyskretną). Jednak, gdy mówimy o metryzacji przestrzeni topologicznej, pytamy o istnienie takiej metryki, że zdefiniowana za jej pomocą topologia jest równoważna wyjściowej.

Geometria rzutowa to nie tylko zbiór, ale też wyróżniona w nim rodzina prostych – metryzacja ma tę klasę zachowywać: zdefiniowanie za pomocą wprowadzonej metryki prostych ma określać tę samą, daną wstępnie klasę prostych.

Precyzując:
• Metryzacja przestrzeni rzutowej to taka metryka, że proste rzutowe (dane nam wraz z przestrzenią) okażą się prostymi lub okręgami wielkimi w sensie metryki.
• Prosta w metryce ρ to taki zbiór punktów, że dla dowolnych trzech z nich A, B, C zachodzi

$$\rho(AB)+\rho(BC)=\rho(AC)\vee$$
$$\vee\rho(BC)+\rho(CA)=\rho(BA)\vee$$
$$\vee\ \rho(CA)+\rho(AB)=\rho(CB).$$

• Okrąg wielki w metryce ρ to okrąg, na którym istnieją takie trzy punkty A, B, C, że dla każdego z punktów X tego okręgu zachodzi

$$\rho(AX)+\rho(XB)=\rho(AB)\vee$$
$$\vee\rho(BX)+\rho(XC)=\rho(BC)\vee$$
$$\vee\ \rho(CX)+\rho(XA)=\rho(CA).$$

Wprowadzone tu pojęcie okręgu wielkiego jest zgodne z tym pojęciem w klasycznej geometrii sfery – każdy bez trudu sprawdzi, że wśród okręgów leżących na sferze jedynie okręgi wielkie spełniają podaną obok definicję.

Uwzględnie okręgów wielkich przy rozważaniach dotyczących geometrii rzutowej jest niezbędne, jako że proste rzutowe są topologicznie okręgami.

Rozwiązanie tak postawionego problemu przyszło ze strony Georga Hamela. Oto jego wynik.

Georg Hamel, *Über die Geometrien in denen Geraden die Kürzesten sind*, Math.Ann. 57(1903), 231-264.

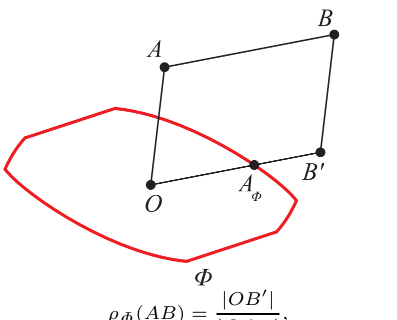
W jednej przestrzeni nie mogą być zrealizowane obie możliwości:
gdy są same okręgi wielkie, jedyną metryką jest *metryka eliptyczna* i zmetryzowana jest cała przestrzeń;

w przeciwnym przypadku metryzacji podlega tylko przestrzeń afiniczna bądź jej wypukłe ograniczone podzbiory otwarte.

W przypadku całej przestrzeni afinicznej odpowiednie metryki to *metryki Minkowskiego* – pewne ograniczenia metryk przytoczonych na wstępie (o czym dalej).

W przypadku wypukłego ograniczonego podbioru przestrzeni afinicznej są to *metryki Hilberta* (patrz margines na poprzedniej stronie).

Metryzacja płaszczyzny afinicznej

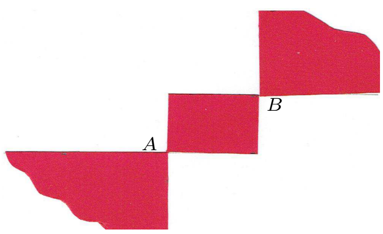


$$\rho_\Phi(AB)=\frac{|OB'|}{|OA_\Phi|},$$
gdzie Φ ogranicza zbiór wypukły o środku symetrii O, $ABB'O$ jest równoległobokiem, a punkt A_Φ jest przecięciem Φ z półprostą OB'.

Przytoczona rodzina metryk Minkowskiego (przypomnienie na marginesie) jest tożsama z metrykami danymi przez *ciało cechujące* omawianymi w artykule Zbigniewa Sawonia (str. 37) – techniczna różnica polega na tym, że tu jest mowa o krzywej, a tam o ograniczanym przez nią obszarze. Będę też używał tego terminu.

Przykłady:

Gdy Φ jest kwadratem $(1,0)(0,1)(-1,0)(0,-1)$, otrzymujemy metrykę miejską (w poprzednim artykule daną przez normę $||\cdot||_1$ – oczywiście, nie jest to metryka Minkowskiego. Jak łatwo zauważyć, dane przez nią metryczne proste nie są prostymi afinicznymi.



Metryczna prosta AB w metryce miejskiej.

Gdy Φ jest elipsą, otrzymujemy metrykę euklidesową (poprawna nazwa, bo otrzymana geometria to geometria euklidesowa).

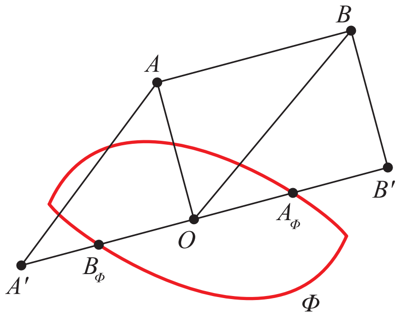
Ten drugi przykład zwraca uwagę na fakt, że tę samą geometrię mogą wyznaczać różne metryki. Każdy bowiem chętnie się zgodzi, że gdy Φ jest okręgiem jednostkowym, to wyznaczona przez niego geometria jest euklidesowa, przy zastąpieniu tego okręgu innym może się przez chwilę zawahać, a gdy będzie to elipsa, może się nawet zastanowić. Ponieważ jednak definicja metryki jest niezmiennicza afinicznie, stwierdzamy, że geometrie (a więc zbiory twierdzeń) przy afinicznej zmianie Φ pozostają te same.
Np. geometrie dane przez metrykę miejską i maksimum (tę od $||\cdot||_\infty$) są identyczne.

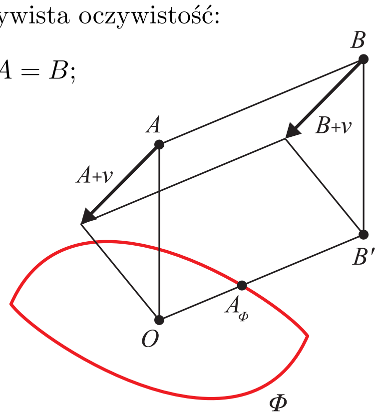
Inaczej mówiąc, różne afinicznie ciała cechujące indukują różne geometrie. Ale najpierw podstawowe własności wprowadzonych przez Minkowskiego metryk.

Na poczatek dowód, że ρ_Φ jest metryką przesuwalną i pytanie, kiedy jest metryką Minkowskiego (a więc indukuje afiniczne proste).

Wszystko, poza nierównością trójkąta, to oczywista oczywistość:

$\rho_\Phi(AB) = 0 \leftrightarrow \rho(OB') = 0 \leftrightarrow \rho(AB) = 0 \leftrightarrow A = B;$





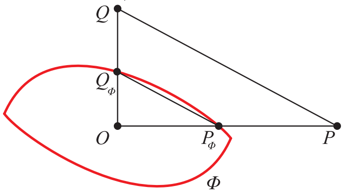
$\rho_\Phi(AB) = \rho_\Phi(BA)$ $\qquad$ $\rho_\Phi(AB) = \rho_\Phi((A+v)(B+v))$ (przesuwalność)

Równie łatwo jest zauważyć, że

$\rho(AX) + \rho(XB) = \rho(AB) \to \rho(OX') + \rho(X'B') = \rho(OB') \to$

$\to \dfrac{\rho(OX') + \rho(X'B') = \rho(OB')}{\rho(OA_\Phi)} \to \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) = \rho_\Phi(AB),$

Aby śledzić dalsze rozumowania warto zauważyć – oczywisty wobec twierdzenia Talesa – fakt, że



$\rho_\Phi(OP) = \rho_\Phi(OQ) \leftrightarrow PQ \parallel P_\Phi Q_\Phi$

czyli, że jeśli X jest punktem prostej afinicznej AB, to jest punktem prostej metrycznej AB.

Aby wykazać, że ρ_Φ jest metryką należy wykazać jeszcze, że

$$\rho(AX) + \rho(XB) > \rho(AB) \to \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) \geqslant \rho_\Phi(AB).$$

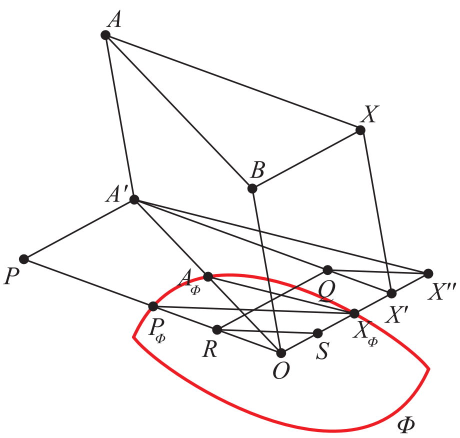
Natomiast, by wykazać, że jest metryką Minkowskiego, należy wykazać więcej:

$$\rho(AX) + \rho(XB) > \rho(AB) \to \rho_\Phi(AX) + \rho_\Phi(XB) > \rho_\Phi(AB),$$

czyli, że jeśli punkt X nie jest punktem prostej afinicznej, to nie jest punktem prostej metrycznej.

Ten dowód jest już nieco bardziej skomplikowany (jakaś trudność być musi).

Bez straty ogólności możemy założyć, że $\rho_\Phi(XB) < \rho_\Phi(AB)$.



Rozważmy (rysunek) takie punkty A', A_Φ, P, P_Φ, Q, R, S, X', X'', X_Φ, że $AA'OB$, $AA'X'X$, $XX'OB$ i $A'X'OP$ są równoległobokami, $X''O \parallel X'O$ i $X''A' \parallel X_\Phi A_\Phi$ oraz $QX' \parallel X'A'$ i $X''Q \parallel X_\Phi P_\Phi$, a także $QX'OR$ i $X''QRS$ są równoległobokami.

Mamy $\sphericalangle OX''Q = \sphericalangle OX_\Phi P_\Phi \leqslant \sphericalangle OX_\Phi A_\Phi = \sphericalangle OX''A'$. (1)

Zatem $\rho_\Phi(AB) - \rho_\Phi(XB) = \rho_\Phi(OX'') - \rho_\Phi(OX') = \rho_\Phi(X'X'') =$
$= \rho_\Phi(OS) = \rho_\Phi(OR) = \rho_\Phi(X'Q) \leqslant \rho_\Phi(X'A') = \rho_\Phi(AX)$. (2)

Co dowodzi, że ρ_Φ jest metryką.

Zauważmy, że jeśli w (1) będzie $<$, to i w (2) będzie $<$.

Jeśli zaś w (1) jest równość, oznacza to, że A_Φ leży na odcinku $P_\Phi X_\Phi$, czyli Φ zawiera w swym brzegu odcinek.

Podsumowując: ciało cechujące faktycznie daje metrykę, w której okręgami (sferami $(n-1)$-wymiarowymi) są wszystkie obrazy Φ w przesunięciach i jednokładnościach, a samo Φ jest okręgiem (sferą) jednostkowym.

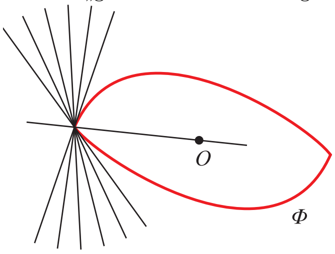
Przesunięcia i jednokładności tworzą grupę zwaną dylatacjami. Są to wszystkie przekształcenia afiniczne zachowujące kierunki, czyli przeprowadzające każdą prostą na prostą do niej równoległą.

Gdy ciało cechujące jest mocno wypukłe (czyli Φ nie zawiera odcinków), otrzymana metryka jest metryką Minkowskiego.

Zobaczmy, jaką geometrię wyznacza ta metryka.

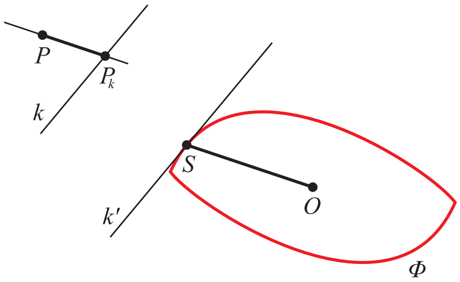
Geometrie Minkowskiego

Fizycy wylansowali nazwę *geometria Minkowskiego* dla czasoprzestrzeni. Przy licznych wystąpieniach Minkowskiego na temat zjawisk elektromagnetycznych towarzyszących poruszających się ciałom jego jedyna opublikowana praca na temat opisujących to równań ukazała się w 1907 roku. Wyabstrahowanie z tego czystej geometrii zawarł Minkowski w pracy *Raum und Zeit*, która ukazała się drukiem tuż po jego przedwczesnej śmierci w 1909 roku (miał 44 lata). Geometria Minkowskiego, o której tu mowa, o której mówił chwalebnie Hilbert (patrz wyżej) powstała w wyniku badań nad geometryczną teorią liczb.
Nie istnieje żaden sensowny związek między tymi dwoma rozumieniami terminu „geometria Minkowskiego".



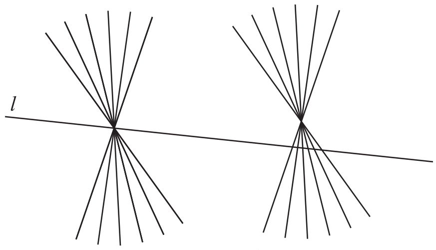
Geometrie Minkowskiego to przestrzenie afiniczne z metrykami danymi przez ciała cechujące będące zbiorami mocno wypukłymi.

Dalej będzie mowa o przypadku płaszczyzny, ale przeniesienie tego na dowolny skończony wymiar nie powinno sprawić kłopotu.



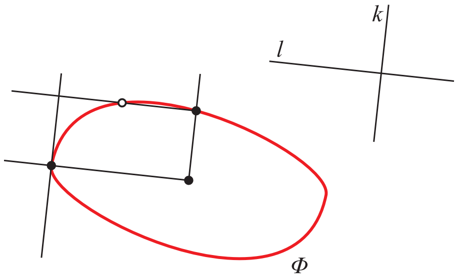
Aby zdefiniować prostopadłość, dogodnie jest posłużyć się rzutem prostokątnym punktu na prostą, zdefiniowanym w nasuwający się sposób: rzutem P_k punktu P na prostą k jest najbliższy mu punkt tej prostej.
Technicznie: gdy równoległa do k styczna k' do Φ ma z Φ punkt wspólny S, to $PP_k \parallel OS$.
Daje to definicję prostopadłości: $k \perp l \leftrightarrow \forall P, Q \in l\ (P_k = Q_k)$.

Oczywiście, $k \perp l_1 \wedge k \perp l_2 \to l_1 \parallel l_2$, ale już nie zawsze $k_1 \perp l \wedge k_2 \perp l \to k_1 \parallel k_2$.



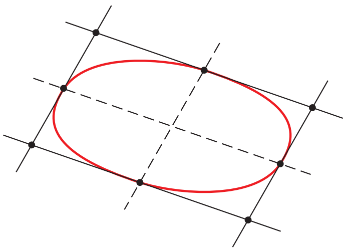
Cały „pęczek" prostopadłych do prostej l powstaje, gdy Φ ma ostrze, gdy nie jest w nim określona styczna do Φ, co powoduje (przesuwalność), że ani podnoszenie prostopadłej, ani opuszczanie nie jest jednoznaczne.

Zatem, aby prostopadła była określona jednoznacznie, Φ musi być gładka.



Jednak nawet dla gładkiej Φ prostopadłość nie musi być symetryczna.

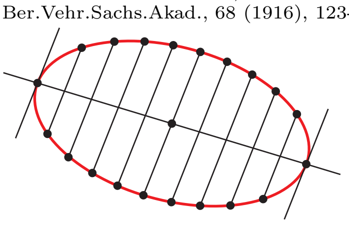
Na rysunku obok prosta k jest prostopadła do prostej l, ale prosta l nie jest prostopadła do prostej k.



Okazuje się (co właściwie widać z podanego kontrprzykładu), że aby prostopadłość była symetryczna, potrzeba i wystarcza, by Φ miała *własność równoległoboku*, co oznacza, że *jeśli opiszemy na Φ równoległobok, którego dwa przeciwległe boki są styczne do Φ w swoich środkach, to jest tak i dla drugiej pary boków.*

Przez pierwszych kilkanaście lat XX wieku próbowano bezskutecznie dowieść, że każda gładka Φ, mająca własność równoległoboku, jest elipsą, czyli definiuje geometrię euklidesową.

Johann Radon, *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Ber.Vehr.Sachs.Akad., 68 (1916), 123-128.



Jednak w 1916 roku Radon przedstawił (dość „paskudny") kontrprzykład i pytanie, czego jeszcze należy zażądać od Φ (oczywiście, chodziło o warunek minimalny, jak najprostszy), by geometria Minkowskiego musiała być euklidesowa, stało się aktualne.

Co więc, poza mocną wypukłością ciała, gładkością brzegu i własnością równoległoboku, jest potrzebne, aby geometria była euklidesowa, czyli by Φ była elipsą (elipsoidą)?

Dopełnia te warunki *własność symetrii*: *dla każdej średnicy l krzywej Φ istnieje taka średnica k, że wszystkie sieczne równoległe do k mają środek na l.*

Nazwa warunku bierze się stąd, że implikuje on istnienie symetrii osiowej względem każdej prostej (w każdej geometrii Minkowskiego możemy, oczywiście, formalnie zdefiniować symetrię osiową: obrazem symetrycznym punktu P względem prostej k jest taki punkt Q, że prosta PQ jest prostopadła do k i środek odcinka PQ leży na k, ale nie dla każdej takiej geometrii to przekształcenie będzie automorfizmem).

Proszę to porównać z charakteryzacją elipsy w artykule Zbigniewa Sawonia.

Tak więc pełna charakteryzacja geometrii euklidesowej jako geometrii Minkowskiego jest następująca: Φ ogranicza obszar mocno wypukły, jest gładka, ma własność równoległoboku i symetrii. Jest to przy okazji jeszcze jedna definicja elipsy.

Twierdzenie Johna

Fritz John jest Szwedem, więc czyta się jego nazwisko *jon.* Ale znam wielu matematyków mówiących o twierdzeniu *dżona.*

Skoro umiemy wyróżnić spośród geometrii danych w przestrzeni afinicznej przez ciało cechujące geometrię euklidesową, powstaje też pytanie, jak dalece różnią się one od tej ich najdoskonalszej wersji.

Odpowiedź jest przykra: różnią się niewiele.

Pierwszy krok, by to stwierdzić, uczynił Karel Löwner, dowodząc, że

Dla dowolnego ograniczonego środkowo symetrycznego ciała wypukłego istnieje dokładnie jedna zawarta w nim elipsa (elipsoida) o maksymalnym polu (mierze), co więcej, jest z nim współśrodkowa.

To, co zaskakuje w tym twierdzeniu, to – oczywiście – „dokładnie jedna” (prosty dowód tego twierdzenia, jak zresztą większości rzeczy zawartych w tym artykule, można znaleźć np. w starej monografii Busemanna i Kelly'ego).

Herbert Busemann, Paul J. Kelly, *Projective geometry and projective metrics*, Academic Press, NY 1953.

Nawet, gdy to wiemy, może nas zaskoczyć fakt, że obraz jednokładny tej minimalnej elipsy (względem jej środka, a więc też środka owego ciała wypukłego) o skali równej pierwiastkowi z wymiaru przestrzeni, w której się znajdujemy, zawiera to ciało.

Fritz John, *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions* in Studies and Essays presented to R.Courant..., NY 1948.

To spostrzeżenie udowodnił (dowód jest nieco bardziej skomplikowany) Fritz John, nadając mu kształt związany z metrykami Minkowskiego:

dla każdej krzywej (powierzchni) Φ istnieje taka elipsa (elipsoida) $\mathcal{E}$, że $\rho_{\mathcal{E}} \leqslant \rho_{\Phi} \leqslant \sqrt{n} \cdot \rho_{\mathcal{E}}$, gdzie n jest wymiarem przestrzeni.

W istocie: należy dodać tylko trywialne spostrzeżenie (biorace się bezpośrednio z definicji metryki danej porzez ciało cechujące), że jeśli ciało $\mathcal{C}_{\infty}$ zawiera ciało $\mathcal{C}_{\in}$, to metryka dana przez większe ciało daje mniejsze pomiary odległości (po prostu okrąg nominowany jako jednostkowy jest większy).

Można by z tego wyciągnąć morał zamykający: wszelkie geometrie skończenie wymiarowe dane przez ciała cechujące różnią się nieistotnie, bo wszystko w nich daje się oszacować dość dobrze tak z góry, jak z dołu przez geometrię euklidesową.

Ale warto jednak pamiętać, że używając różnych metryk, możemy zobaczyć interesujące nas obiekty i zależności niejako z różnych stron, o czym traktują fundamentalne dla tego wydania *Matematyki Poglądowej* artykuły Adama Bobrowskiego i Jacka Banasiaka.

*marek.kordos40@gmail.com