Ciała cechujące i elipsoidy

Zbigniew SAWOŃ

Artykuł ten powstał 36 lat temu i został wydrukowany w miesięczniku *Delta* (8/1985 (140), str. 1–3).
To było dawno, ale warto go przeczytać i dziś w numerze *Matematyki Poglądowej* poświęconym Analizie Funkcjonalnej (tak, z dużych liter o niej pisze Autor).

Problematyka ciał cechujących czy metryk Minkowskiego ma też swój inny kontekst, geometryczny, związany z IV Problemem Hilberta. Autor tego tekstu od kilkunastu lat nie żyje, dlatego pozwoliłem sobie – przygotowując ten tekst do druku – niejako w komentarzu do niego – sam przypomnieć ten kontekst w zamieszczonym dalej tekście *Różne kule, różne geometrie.*

Marek Kordos

Jak wiadomo, w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^k$ można metrykę wprowadzić na wiele sposobów. Z punktu widzenia Analizy Funkcjonalnej najistotniejsze są te metryki, które są określone przez normę jednorodną i o nich też będzie tu mowa.

Funkcja $||\cdot||$ nazywa się normą jednorodną, jeżeli
1. $||x|| \geqslant 0$ i $||x|| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ dla każdych $x \in \mathbb{R}^k$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ dla każdych $x,\ y \in \mathbb{R}^k$;
przykłady norm będą dalej.

Za pomocą normy można zdefiniować metrykę w następujący sposób:
$$\rho(x,\ y) = ||x - y|| \text{ dla } x,\ y \in \mathbb{R}^k.$$

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że funkcja ta ma wszystkie własności metryki, a poza tym jeszcze dwie dodatkowe:
(i) $\rho(x + c,\ y + c) = \rho(x,\ y)$ dla każdego $x,\ y,\ c \in \mathbb{R}^k$ (tzn. jest przesuwalna),
(ii) $\rho(\lambda x,\ \lambda y) = \lambda\rho(x,\ y)$ dla każdego $\lambda \geqslant 0$ i $x,\ y \in \mathbb{R}^k$
(dla przypadku $k = 2$ i „zwyczajnej” odległości na płaszczyźnie jest to twierdzenie Talesa).

Łatwo zauważyć, że gdy metryka ρ spełnia warunki (i) i (ii), to wyznacza metrykę jednorodną daną wzorem
$$||x|| = \rho(x,\ 0).$$

Jeżeli w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ określona jest norma jednorodna $||\cdot||$, to parę $\langle\mathbb{R}^k,\ ||\cdot||\rangle$ nazywamy k-wymiarową przestrzenią liniową unormowaną.

Powstaje pytanie, jak konstruować w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ normy jednorodne?

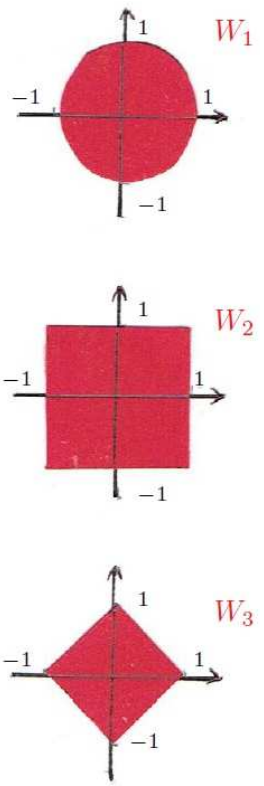
Przyjrzyjmy się trochę dokładniej zbiorowi $W_0 = \{x :\ ||x|| \leqslant 1\}$ (domknięta kula jednostkowa względem normy $||\cdot||$).

Zbiór ten ma następujące własności:
1. W_0 jest zbiorem wypukłym,
2. $0 \in W_0$ oraz 0 jest środkiem symetrii W_0 (tzn. $x \in W_0 \Rightarrow -x \in W_0$),
3. dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$ istnieje takie $t > 0$, że $tx \in W_0$
(W_0 jest zbiorem pochłaniającym),
4. jeżeli $x_0 \in W_0$ i dla każdego $t > 0$ jest $tx_0 \in W_0$, to $x_0 = 0$
(W_0 nie zawiera półprostych).

Jeżeli $W \subset \mathbb{R}^k$ spełnia warunki 1, 2, 3, 4, to W nazywa się ciałem cechującym.
Np. kula jednostkowa o środku w początku układu współrzędnych (ozn. $\overline{K}(0,\ 1)$) jest ciałem cechującym.

Jeżeli $W \subset \mathbb{R}^k$ jest ciałem cechującym, to wzór
$$p_W(x) = \inf\{t > 0 :\ \tfrac{1}{t}x \in W\} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^k$$
wyznacza normę jednorodną w $\mathbb{R}^k$.

Norma ta nazywa się funkcjonałem Minkowskiego generowanym przez W.
Na rysunku 1 przedstawione są trzy standardowe ciała cechujące w $\mathbb{R}^k$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić dla $x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ mamy
$p_{W_1} = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = ||x||_2$,
$p_{W_2} = \max(|x_1|,\ |x_2|) = ||x||_\infty$,
$p_{W_3} = |x_1| + |x_2| = ||x||_1$.
Symbole wyróżnione kolorem to standardowe oznaczenia tych norm używane w Analizie Funkcjonalnej. Metryka wyznaczona przez $||x||_2$ to zwyczajna metryka euklidesowa.



Rys. 1

Zauważmy wreszcie, że norma $||x||_2$ jest generowana zarówno przez koło z brzegiem, jak i bez brzegu.

Oznaczmy $A = \{x : p_W(x) < 1\}$ i $B = \{x : p_W \leqslant 1\}$. Łatwo zauważyć, że
1. $A \subset W \subset B$,
2. jeżeli V jest takim ciałem cechującym, że $A \subset V \subset B$, to $p_W(x) = p_V(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$,
3. jeżeli $||\cdot||$ jest normą jednorodną i $W = \overline{K}(0, 1)$, to $||x|| = p_W(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$.

W ten sposób uzyskaliśmy pełny opis konstrukcji norm jednorodnych w przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

W Analizie Funkcjonalnej wyróżnia się normy pochodzące od iloczynu skalarnego.

Funkcję $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ nazywamy iloczynem skalarnym, jeżeli
1. $F(x, x) \geqslant 0$ oraz $F(x, x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = (0, \ldots, 0)$,
2. $F(x, y) = F(y, x)$ dla $x, y \in \mathbb{R}^k$,
3. $F((\alpha x_1 + \beta x_2), y) = \alpha F(x_1, y) + \beta F(x_2, y)$ dla $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Jeżeli F jest iloczynem skalarnym, to kładąc $||x||_F = (F(x, x))^{\frac{1}{2}}$ dla $x \in \mathbb{R}^k$, otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić, normę jednorodną. Normy takie nazywamy normami hilbertowskimi w $\mathbb{R}^k$.

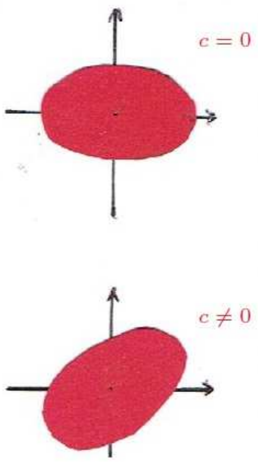
Jeśli $F_0(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ dla $x = (x_1, x_2)$, i $y = (y_1, y_2)$, to F_0 jest iloczynem skalarnym i $||x||_{F_0} = ||x||_2$, więc norma $||x||_2$ jest normą hilbertowską.

Można zadać pytanie, czy norma $||\cdot||_\infty$ jest normą hilbertowską.

Wykonując niezbyt trudne rachunki, można sprawdzić, że w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ każdy iloczyn skalarny ma postać

$$F(x, y) = ax_1y_1 + bx_2y_2 + c(x_1y_2 + x_2y_1), \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2 > 0.$$

Wówczas $||x||_F = (ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2)^{\frac{1}{2}}$.
Ciałem cechującym generującym tę normę jest zbiór $W = \{(x_1, x_2) : ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 \leqslant 1\}$, a więc obszar ograniczony elipsą (rys. 2).
Jest też „odwrotnie": jeśli W jest ciałem cechującym w $\mathbb{R}^2$ ograniczonym elipsą, to norma generowana przez W jest normą hilbertowską.



Rys. 2

Podobnie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ norma jest hilbertowska wtedy i tylko wtedy, gdy ciało cechujące jest ograniczone elipsoidą.

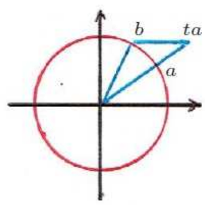
Można postawić teraz następujący problem:
Jak w $\mathbb{R}^k$ wyróżnić wśród norm jednorodnych normy hilbertowskie lub wśród wszystkich ciał cechujących ciała ograniczone elipsoidami?

Zacznijmy od pierwszej części powyższego pytania.

1. Przypuśćmy, że norma $||\cdot||$ jest normą hilbertowską w $\mathbb{R}^k$ wyznaczoną przez iloczyn skalarny F. Wówczas

$$||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2tF(x, y) + t^2||y||^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^k,\ t \in \mathbb{R}.$$

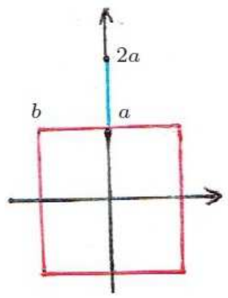
Wstawiając w tym wzorze $t = 1$ oraz $t = -1$ i dodając stronami, otrzymujemy
(i) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ dla $x, y \in \mathbb{R}^k$
(jest to tzw. równość von Neumanna).
Wstawiając z kolei $||x|| = ||y|| = 1$, otrzymujemy
(ii) $||x + ty|| = ||tx + y||$, dla $t \in \mathbb{R}$.



Rys. 3

Okazuje się, że następujące warunki są równoważne:
(a) norma jednorodna $||\cdot||$ jest normą hilbertowską w $\mathbb{R}^k$,
(b) dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^k$ mamy $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$,
(c) dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}$, jeśli $||x|| = ||y|| = 1$, to $||x + ty|| = ||tx + y||$.

2. Zauważmy, że w przestrzeni $\langle \mathbb{R}^2, ||\cdot||_2\rangle$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, jeśli $||a|| = ||b|| = 1$, to $||ta - b|| > ||a - b||$ (rys. 3).
Inaczej jest, gdy mamy do czynienia z normą $||\cdot||_\infty$. Wówczas w sytuacji z rysunku 4 wszystkie punkty leżące w odcinku $[a, 2a]$ są odległe w sensie normy $||\cdot||_\infty$ od punktu b o 1.
Tak więc $||ta - b||_\infty = ||a - b||_\infty = 1$ dla każdego $t \in [1, 2]$.



Rys. 4

Okazuje się, że do warunków (a), (b), (c) można dołączyć jeszcze jeden równoważny warunek:
(d) dla każdych $a,\, b \in \mathbb{R}^k$ oraz $t > 1$, jeśli $||a|| = ||b||$, to $||ta - b|| = ||a - b||$.

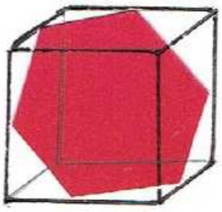
3. W przestrzeni $\langle \mathbb{R}^k,\, ||\cdot||\rangle$ rozpatrzmy zbiór

$$A(a,\, b,\, \alpha) = \left\{x \in \mathbb{R}^k : \frac{||x-a||}{||x-b||} = \alpha\right\},\ \text{gdzie } a,\, b \in \mathbb{R}^k,\ a \neq b,\ \alpha > 0.$$

W przypadku $\langle \mathbb{R}^2,\, ||\cdot||_2\rangle$ jeśli $\alpha = 1$, to $A(a,\, b,\, \alpha)$ jest symetralną odcinka ab, zaś gdy $\alpha \neq 1$ – jest okręgiem. Okazuje się, że mamy kolejny warunek równoważny warunkowi (a):
(e) dla każdych $a,\, b \in \mathbb{R}^k$, $a \neq b$ i $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, istnieją takie $x_0 \in \mathbb{R}^k$ oraz $r > 0$, że $A(a,\, b,\, \alpha) = \{x : ||x - x_0|| = r\}$.

Autor poleca Czytelnikowi podjęcie trudu ustalenia ogólnej postaci zbioru $A(a,\, b,\, \alpha)$ w przypadku norm $||\cdot||_\infty$ i $||\cdot||_1$.

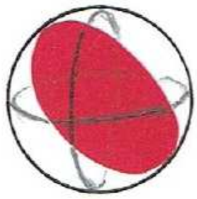
Teraz podamy parę uwag związanych z drugą częścią problemu.
1. Rozważmy przypadek $\langle \mathbb{R}^3,\, ||\cdot||_\infty\rangle$. Ciałem cechującym tę normę jest sześcian $W = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leqslant 1,\, |x^2| \leqslant 1,\, |x_3| \leqslant 1\}$.
Niech P_0 będzie płaszczyzną przechodząca przez punkt $(0,\, 0,\, 0)$ i przecinającą sześcian W tak, jak na rysunku 5. Punkty należące do powstałego sześciokąta mają normę nie większą niż 1. Jeżeli weźmiemy dowolny rzut na płaszczyznę P_0, to po zrzutowaniu co najmniej jeden z obrazów wierzchołków sześcianu będzie leżał na zewnątrz sześciokąta, a więc będzie miał normę większą od 1.



Rys. 5

Zupełnie inaczej jest w przypadku $\langle \mathbb{R}^3,\, ||\cdot||_2\rangle$. Jeśli weźmiemy rzut w kierunku prostopadłym do P_0, to obraz każdego punktu ciała cechującego będzie leżał w „kolorowej" części płaszczyzny P_0, a więc będzie miał normę nie większą niż 1.

Okazuje się, że dla $k \geqslant 3$ następujące warunki są równoważne:
(A) W jest ciałem cechującym w $\mathbb{R}^k$ ograniczonym elipsoidą,
(B) dla każdej podprzestrzeni $P_0 \subset \mathbb{R}^k$ istnieje taki rzut π na P_0, że $p_W(\pi(x)) \leqslant 1$ dla dowolnych $x \in W$.



Rys. 6

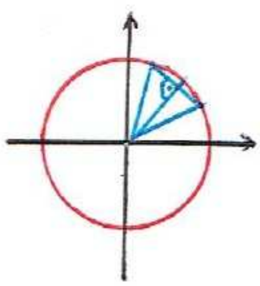
2. Dla ciała cechującego W i $\varepsilon > 0$ określamy

$$\omega_W(\varepsilon) = \inf\left\{1 - p_W\left(\frac{x+y}{2}\right) : \ p_W(x) = p_W(y) = 1,\ p_W(x-y) = \varepsilon\right\}.$$

Tę liczbę ε nazywamy modułem wypukłości ciała cechującego W.

W przypadku przestrzeni $\langle \mathbb{R}^2,\, ||\cdot||_2\rangle$ mamy (rys. 7)

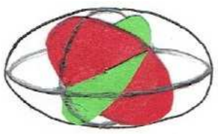
$$\omega_W(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}\ \text{dla } \varepsilon > 0,\ \text{stąd } \lim_{\varepsilon \leftarrow 0} \frac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{8}.$$



Rys. 7 $||x - y||_2 = \varepsilon$.

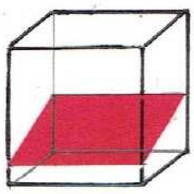
Gdy W jest ciałem cechującym ograniczonym elipsą, to można wykazać, że istnieją takie stałe dodatnie m i M, że $m \leqslant \frac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leqslant M$ dla każdego $\varepsilon > 0$.
Okazuje się, że do warunków (A) i (B) można dodać kolejny, równoważny z nimi:
(C) istnieją takie stałe $m > 0$ i $M > 0$, że $m \leqslant \dfrac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leqslant M$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

3. Rozważmy ciało cechujące W w $\mathbb{R}^3$ ograniczone elipsoidą. Przekroje podprzestrzeniami dwuwymiarowymi P_1 i P_2 ciała W są ograniczone przez elipsy E_1 i E_2 (rys. 8). Istnieje takie afiniczne odwzorowanie $\Phi : P_1 \to P_2$, że $\Phi(E_1) = \Phi(E_2)$ – możemy powiedzieć, że każde dwa przekroje ciała cechującego W są afinicznie równoważne. Inaczej jest w przypadku, gdy ciałem cechującym jest sześcian, co demonstrują rysunek 5 i 9.
Okazuje się, że równoważny (A) jest także następujący warunek:
(D) każde dwa przekroje ciała cechującego W podprzestrzeniami dwuwymiarowymi są afinicznie równoważne.



Rys. 8

Problem postawiony powyżej można uogólnić w następujący sposób:
Niech W będzie ciałem cechującym położonym w przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Przypuśćmy, że każde dwa przekroje W przestrzeniami m-wymiarowymi $(1 < m < k)$ są równoważne afinicznie. Czy W jest wtedy ciałem cechującym ograniczonym elipsoidą?
Pełnej odpowiedzi na to pytanie nie znamy. Nierozstrzygnięty przypadek dotyczy sytuacji, w której k jest parzyste, a $m = k - 1$ (np. $k = 4$ i $m = 3$). W pozostałych przypadkach odpowiedź jest pozytywna.



Rys. 9