

# Modelowanie, równania i operatorowe podejście do ich rozwiązywania

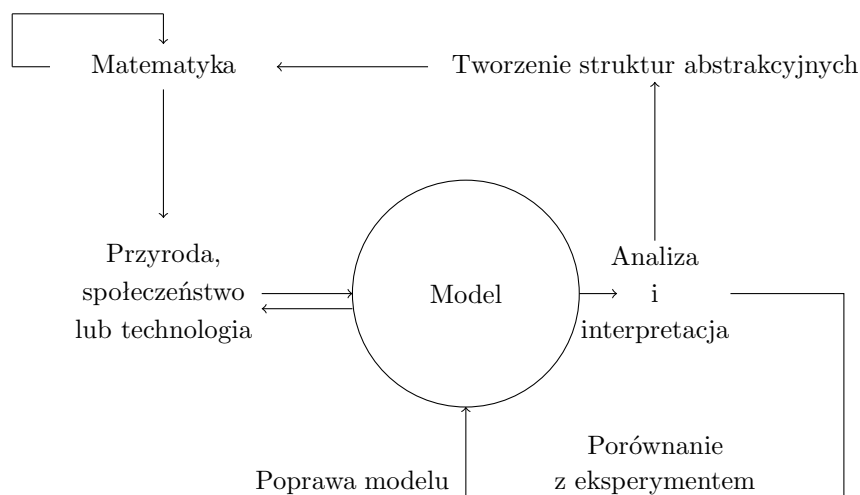
Jacek BANASIAK\*, Łódź, Pretoria

Autor serdecznie dziękuje mgr. Adamowi Błochowi i prof. Adamowi Bobrowskiemu za wnikliwe przeczytanie artykułu i pomoc w usunięciu licznych fragmentów stanowiących obrazę języka polskiego.

## 1. O modelowaniu matematycznym

Modelowaniem matematycznym nazywamy proces budowania modeli matematycznych, czyli pewnych struktur – najczęściej równań – które opisują w sposób jakościowy lub ilościowy zjawiska w świecie zewnętrznym i starają się przewidzieć ich właściwości oraz zachowanie w zakresie wykraczającym poza dostępne dane. Proces modelowania matematycznego i jego związki z matematyką są schematycznie przedstawione na rysunku 1.

Przyjmujemy tutaj, że – ponieważ pochodzimy z tego świata – nic, co tworzymy, nie może powstać całkowicie wewnątrz nas, bez inspiracji zjawisk zewnętrznych. Każdy, nawet najbardziej abstrakcyjny obiekt, ma swój początek w jakimś elemencie świata zewnętrznego. Model może być strukturą algebraiczną, geometryczną lub równaniem. To, co z nim zrobimy, zależy w dużej mierze od nas. Jeśli jesteśmy głównie zainteresowani wykorzystaniem go w praktyce, po wstępnej analizie i interpretacji, na rysunku 1 kierujemy się w dół i, ponieważ prawie nigdy ciekawe równania nie mają rozwiązań jawnych, stosujemy metody numeryczne, aby uzyskać wyniki, które dają się porównać z danymi doświadczalnymi. Jeśli są one zgodne, to mamy satysfakcję, że nasz model przynajmniej nie jest sprzeczny z obiektem modelowanym i możemy próbować poszerzać zakres jego stosowania. Jeśli wyniki symulacji numerycznych nie są wystarczająco zgodne z danymi doświadczalnymi, musimy przystąpić do poprawy modelu.



Rys. 1. Matematyka i modelowanie matematyczne

Warto tutaj podkreślić, że modelowanie matematyczne nie jest matematyką. Nie jesteśmy w stanie udowodnić, że jakiś model jest dobry. W książce *Empirical Model-Building and Response Surfaces* jej autorzy Box i Draper stwierdzają, że należy sobie uświadomić, iż wszystkie modele są złe i jedyne, co możemy zrobić, to ocenić, które modele nie są na tyle złe, żeby nie być bezużyteczne, zob. [10].

Pytanie, na ile modele reprezentują z mniejszą lub większą dokładnością zjawiska świata zewnętrznego, należy bardziej do epistemologii, niż do matematyki i odpowiedź na nie zależy od tego, na ile ufamy, że świat ma racjonalną strukturę i nasz umysł jest z tą racjonalnością zsynchronizowany. Niezależnie od

\*University of Pretoria, Politechnika Łódzka, jacek.banasiak@up.ac.za

tego, niewątpliwie są modele, które możemy uznać za dobre, gdyż wykazały zdolność predykcyjną, to znaczy pozwoliły wywnioskować istnienie zjawisk, które były nieznane w momencie budowania modelu. Możemy wymienić tutaj

- mechanikę newtonowską, dzięki której została odkryta planeta Neptun;
- Ogólną Teorię Względności, która pozwoliła wywnioskować istnienie fal grawitacyjnych i ugięcie światła w polu grawitacyjnym;
- równania Diraca, na podstawie których odkryto pozyton;
- Model Standardowy w fizyce cząstek elementarnych, który umożliwił, między innymi, odkrycie bozonu Higgsa.

Warto podkreślić, że ostatni model nie ma formy równania różniczkowego, ale jest związany z reprezentacją grup symetrii.

Po tej krótkiej wycieczce do krainy modelowania matematycznego, skróćmy na rysunku 1 w górę. Mając model, możemy przestać się zastanawiać nad jego pochodzeniem i związkami ze światem zewnętrznym i zacząć traktować go jako obiekt czysto matematyczny, budując na jego bazie odpowiednią teorię drogą dedukcji. W tym momencie zaczyna się matematyka – operacje logiczne na dobrze zdefiniowanym obiekcie. Przykładowo, jeśli dowodzimy jakichś twierdzeń o równaniu dyfuzji, to uzyskujemy wyniki tylko o równaniu dyfuzji, a nie o procesie dyfuzji, którego modelem, ale nie dokładną reprezentacją, jest to równanie.

Analizując w taki sposób modele, możemy starać się interpretować wyniki w języku zjawisk, których te modele dotyczą, aby sprawdzić, na ile nasze wyniki mówią coś istotnego o tych zjawiskach. Nie jest to jednak niezbędne, gdyż matematyka może rozwijać się niezależnie od impulsów zewnętrznych i rozwiązywać problemy, które powstają wewnątrz niej samej, co jest zaznaczone w lewym górnym rogu rysunku 1. Nie oznacza to, że wyniki uzyskane w takim abstrakcyjnym kontekście nie mają żadnego związku ze światem zewnętrznym. Wystarczy wspomnieć tutaj zastosowania teorii liczb (uważanej przez wieki za dyscyplinę matematyczną najbardziej odległą od zastosowań) w kryptografii, algebry liniowej do internetowych wyszukiwarek, czy kwaternionów do opisu ruchu satelitów, by uzasadnić wcześniejsze stwierdzenie, że choćbyśmy starali się ze wszystkich sił uciec od świata zewnętrznego, może się on niespodziewanie wynurzyć za najbliższym zakrętem.

Jak zauważyliśmy wcześniej, ciekawe modele z reguły nie mają jawnych rozwiązań, zatem aby uzyskać wyniki interesujące dla nauk stosowanych, musimy uciec się do metod numerycznych. W związku z tym trzeba podkreślić, że niezależnie od czysto poznawczej wartości matematycznej analizy modeli, jej brak pomiędzy sformułowaniem modelu a jego analizą komputerową może powodować, że uzyskane wyniki numeryczne będą niepoprawne i bezwartościowe w zastosowaniach. Przykładowo, jeśli skonstruowane równanie nie ma rozwiązań lub ma ich wiele, standardowe metody numeryczne mogą nie być w ogóle zbieżne, lub zbiegać do jakiejś kombinacji różnych rozwiązań. Podobnie, zbieżność algorytmów numerycznych w istotny sposób zależy od regularności rozwiązań. Jeśli wymaganej regularności brak, to rozwiązanie numeryczne może „nie widzieć” istotnych właściwości prawdziwego rozwiązania, na przykład tak zwanej katastrofy gradientowej, pojawiającej się w rozwiązaniach równań cząstkowych w pobliżu punktów, w których brzeg obszaru nie jest różniczkowalny. Właśnie katastrofa gradientowa, przejawiająca się w koncentracji naprężeń w rogach kwadratowych okien, była jedną z głównych przyczyn wypadków pierwszego odrzutowego samolotu pasażerskiego de Havilland Comet w latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia. Inną właściwością równań różniczkowych, która ma wpływ na wiarygodność wyników symulacji komputerowych, jest ich wrażliwość na małe zmiany parametrów i warunków początkowych oraz brzegowych. Wynika to z faktu, że zarówno dane, jak i parametry równania, są efektem pomiarów, które praktycznie zawsze obciążone są błędem. Żeby zatem wyniki numeryczne miały jakiegokolwiek znaczenie, rozwiązania równań z bliskimi sobie parametrami i danymi powinny mało się od siebie różnić. Mit, że jest to typowa właściwość równań różniczkowych, został obalony wraz z odkryciem

deterministycznych układów chaotycznych przez Lorentza.

Widzimy więc, że dogłębna matematyczna analiza równań konstruowanych w procesie modelowania matematycznego ma zarówno wartość teoretyczną, przyczyniając się do rozwoju matematyki, jak też i praktyczną, uprawomocniając używanie określonych metod przybliżonych i numerycznych. Parafrazując słowa P. Laxa, zob. [10], można to ująć tak: w procesie modelowania budujemy równania opisujące zjawiska naturalne w sposób przybliżony, ale równania te chcemy rozwiązać w sposób dokładny.

W następnym podrozdziale opiszemy pewne aspekty tej analizy.

## 2. Analiza równań

Równania różniczkowe, różnicowe, czy też całkowe, często występujące w jednym modelu, od czterech stuleci są używane do opisu Wszechświata, od ewolucji galaktyk do oddziaływań pomiędzy cząstkami elementarnymi. W poniższej dyskusji ograniczymy się do autonomicznych równań ewolucji pierwszego rzędu względem pochodnej czasowej (do których to można równania wyższych rzędów sprowadzić). Warto sobie tutaj uświadomić, że w procesie modelowania otrzymujemy równania postaci

$$\partial_t u(t, x) = [\mathcal{K}u(t, \cdot)](x), \quad u(0, x) = \hat{u}(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

uzupełnione, jeśli trzeba, odpowiednimi warunkami na brzegu zbioru  $\Omega$ , gdzie  $\mathcal{K}$  jest jakimś wyrażeniem różniczkowym, całkowym, bądź funkcyjnym, zdefiniowanym na funkcjach określonych na pewnym zbiorze  $\Omega$  (z naturalną modyfikacją definicji, gdy  $\Omega$  jest zbiorem dyskretnym). W naukach stosowanych równanie to jest rozumiane w sensie podstawowego rachunku różniczkowego i całkowego, to znaczy wszystkie operacje wyszczególnione w równaniu można wykonać w sensie klasycznym i równanie powinno być spełnione w każdym punkcie  $x \in \Omega$ .

Jak wspomnieliśmy wcześniej, w większości ciekawych przypadków równania typu (1) nie mają jawnych rozwiązań. W związku z tym musimy stworzyć odpowiednią scenę matematyczną umożliwiającą zbudowanie teorii, w ramach której będzie można odnieść się do problemów opisanych w poprzednim podrozdziale, czyli skonstruować narzędzia oceny jakościowych właściwości rozwiązań równań pod kątem stosowalności różnych metod przybliżonych i numerycznych do ich aproksymacji. Warto jeszcze raz podkreślić, że badamy tutaj nieznanne obiekty wyłącznie na podstawie informacji pośrednich pochodzących od równań przez nie spełnionych. Często wymaga to użycia zaawansowanych metod matematycznych bardzo dalekich od klasycznej teorii równań różniczkowych.

Jednym z problemów pojawiających się przy realizacji tego programu jest fakt, że takich scen matematycznych i teorii, nawet w ramach jednej sceny, może być wiele. Aby wyjaśnić to stwierdzenie, zauważmy, że (1) nie jest tak naprawdę równaniem w sensie matematycznym. Zachodzi tu pewne podobieństwo z kwestią, czy  $f(x) = x^2$  jest funkcją. Większość fizyków lub inżynierów odpowie na to pytanie twierdząco. Jednak dla matematyka funkcja to specyficzna relacja dwuargumentowa na iloczynie kartezjańskim dwóch zbiorów, zatem wzór  $f(x) = x^2$  może co najwyżej posłużyć do definiowania funkcji, których może być nieskończenie wiele, w zależności od doboru dziedziny. Podobnie, aby równanie (1) mogło być traktowane jako pełnoprawny byt matematyczny, musimy określić, między innymi, klasy funkcji, na których jest ono rozważane i co rozumiemy przez jego rozwiązanie.

W niniejszym artykule skupimy się na badaniu równań ewolucyjnych typu (1) za pomocą narzędzi analizy funkcjonalnej. Mówiąc dokładniej, traktujemy funkcje pojawiające się w (1) jako stany pewnego układu należące do odpowiednio zdefiniowanej przestrzeni stanów, zaś rozwiązania (1) opisujemy za pomocą parametryzowanej czasem rodziny odwzorowań tej przestrzeni stanów w siebie. Wówczas wartości tych operatorów na  $\hat{u}$  reprezentują kolejne stany procesu opisywanego przez (1). Taka rodzina nazywana jest układem dynamicznym lub, w przypadku liniowym, półgrupą operatorów.

Zauważmy, że już samo sformułowanie (1) narzuca pewne ograniczenia na przestrzeń stanów. Operacja klasycznego różniczkowania wymaga zbudowania ilorazu różnicowego, więc musimy mieć możliwość dodawania różnych stanów i mnożenia ich przez skalar (jakim jest odwrotność przyrostu czasu). Oznacza to, że przestrzeń stanów powinna być przestrzenią liniową. Jeśli dołożymy do tego możliwość przybliżania stanów i swobodnego przechodzenia do granicy, niezbędną przy aproksymacji, musimy mieć pojęcia odległości i zupełności. Aby uniknąć patologii, chcielibyśmy, aby pojęcie odległości było zgodne z operacjami liniowymi. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że naturalnymi przestrzeniami stanów dla równań różniczkowych są przestrzenie Banacha i od tej pory będziemy zawsze zakładać, że z takimi przestrzeniami mamy do czynienia.

Warto jeszcze raz podkreślić, że model matematyczny nie jest tożsamy z obiektem modelowanym. Jak zauważyliśmy wcześniej, aby model miał jakiegokolwiek szanse na bycie użytecznym, musi spełniać pewne warunki. Mówimy wówczas, że zagadnienie matematyczne zbudowane na bazie tego modelu jest dobrze postawione. Klasyczna definicja dobrze postawionego zagadnienia pochodzi od J. Hadamarda. Przedstawimy ją poniżej, uzupełnioną dodatkowym warunkiem wiążącym model z opisywanym zjawiskiem.

### **Czego oczekujemy od poprawnego modelu?**

1. *Istnienie rozwiązań.* Jest to wymóg, abyśmy w procesie modelowania nie użyli wzajemnie wykluczających się postulatów powodujących, że model staje się wewnętrznie sprzeczny.

2. *Jednoznaczność rozwiązań.* To jest z kolei żądanie, abyśmy w procesie modelowania użyli pełnej wiedzy o opisywanym zjawisku i związkach przyczynowo-skutkowych nim rządzących.

3. *Ciągła zależność od parametrów i danych wejściowych.* Tutaj wymagamy, aby małe zmiany mierzalnych parametrów modelu nie powodowały dużych zmian rozwiązań – w przeciwnym wypadku nie jesteśmy w stanie uzyskać wiarygodnych wyników numerycznych i porównać ich z danymi doświadczalnymi.

4. *Uczciwość.* Wymagamy, aby z rozwiązań równań modelu można było wyprowadzić właściwości modelowanego zjawiska, które zostały użyte do jego budowy.

Pierwsze trzy postulaty pochodzą od J. Hadamarda. Aby przybliżyć postulat czwarty, omówimy dwa przykłady. Po pierwsze, zauważmy, że w wielu procesach fizycznych i biologicznych wymagane jest, by stan układu wyrażał się wielkością nieujemną – może to być gęstość, energia, czy też temperatura (bezwzględna). Stąd, aby opisujące takie procesy układy dynamiczne miały sens fizyczny, powinny mieć rozwiązania nieujemne, o ile dane wejściowe są nieujemne. Układy dynamiczne mające tę własność nazywane są układami nieujemnymi. Jako drugi ważny aspekt modelowania możemy wymienić wykorzystanie zasad zachowania, na przykład masy lub energii, które są podstawowym budulcem modelu. Równania opisujące zasady zachowania albo w sposób jawny stanowią część modelu, albo można je z równań modelu wyprowadzić za pomocą formalnych przekształceń (przez przekształcenia formalne rozumiemy przekształcenia równań, które są uzasadnione, jeśli rozwiązania są wystarczająco regularne). Okazuje się, że prawdziwe rozwiązania mogą nie spełniać takich formalnych zasad zachowania, choć były one użyte do wyprowadzenia modelu. Jeśli rozwiązania nie spełniają formalnych praw zachowania, to model nazywamy nieuczciwym.

Celem niniejszego artykułu jest omówienie kilku modeli, których konstrukcja sugeruje, że są dobrze postawione, ale jednak nie spełniają któregoś postulatów z powyższej listy, oraz omówienie funkcjonalno-analitycznego podejścia do wyjaśnienia pojawiających się w związku z tym patologii. Szczegóły tej teorii można znaleźć w monografiach [3, 6]. Do zapoznania się z podejściem probabilistycznym do podobnych problemów można natomiast polecić [8].

### 3. Równania dynamiki populacyjnej

Omówimy tutaj klasę równań opisujących zmiany w strukturze pewnej populacji, od rozwiązań których oczekujemy zarówno nieujemności, jak i spełnienia naturalnych praw zachowania. Przez populację rozumiemy zbiór obiektów żywych lub nieżywych, podzielonych, ze względu na określone cechy, na skończoną, przeliczalną lub nieprzeliczalną liczbę klas. Równania dynamiki populacyjnej opisują, jak liczba obiektów o danej cesze zmienia się w wyniku oddziaływań pomiędzy nimi oraz z otoczeniem. Przykładowo, poruszające się cząsteczki gazu charakteryzowane są za pomocą prędkości i położenia, które mogą ulegać zmianie przy zderzeniach; polimery można dzielić na klasy ze względu na ich długość zmieniającą się w trakcie fragmentacji i koagulacji [6], zwierzęta danego gatunku można podzielić na podstawie ich wieku lub miejsca pobytu [4, 19], komórki można charakteryzować za pomocą ich dojrzałości lub posiadania określonej liczby kopii danego genu [17, 22].

Rozwiązaniami równań dynamiki populacyjnej są gęstości obiektów o danej cesze. W przypadku skończonej liczby klas możemy mówić po prostu o liczbie obiektów posiadających daną cechę. Jeśli  $u(x)$  jest liczbą obiektów w stanie  $x$ , to podstawowe prawo zachowania mówi, że w dowolnym okresie czasu musi zachodzić poniższa równość:

$$\begin{aligned} \text{zmiana } u(x) = & \text{ migracja obiektów do klasy } x \text{ z pozostałych stanów} \\ & - \text{ emigracja z klasy } x \text{ do pozostałych stanów} \\ & + \text{ urodziny nowych obiektów w klasie } x \\ & - \text{ śmierć obiektów w klasie } x, \end{aligned} \quad (2)$$

w której pojęcia urodzin i śmierci dotyczą ogólnych procesów pojawiania się i anihilacji obiektów wewnątrz danej klasy, niezwiązanych z migracjami.

W związku z tą interpretacją, rozwiązania tych równań wychodzące z nieujemnych stanów początkowych muszą być nieujemne. Zauważmy dalej, że całkowita liczba obiektów w układzie jest równa

$$N = \sum_{x \in \Omega} u(x), \quad (3)$$

gdzie  $\Omega$  jest zbiorem wszystkich możliwych klas obiektów, przy czym suma w powyższym wzorze jest interpretowana jako całka w przypadku, gdy  $\Omega$  jest zbiorem nieprzeliczalnym (wyposażonym w odpowiednią miarę). Widzimy więc, że jeśli chcemy kontrolować wielkość populacji, to naturalnymi przestrzeniami stanów dla równań dynamiki populacyjnej są przestrzenie typu  $l^1(\Omega)$  lub  $L^1(\Omega)$ , w których norma rozwiązań nieujemnych, zdefiniowana wzorem (3), daje całkowitą liczbę obiektów populacji. Nie jest to oczywiście jedyna możliwość – jeśli chcemy kontrolować maksymalne zagęszczenie obiektów, to właściwymi przestrzeniami byłyby przestrzenie z normą maximum/supremum.

Dodatkową zaletą norm typu  $l^1$  jest fakt, że (2) daje natychmiast podstawowe prawo zachowania. Jeśli wysumujemy (2) po wszystkich klasach  $x$  i uwzględnimy, że człony opisujące migracje powinny sumować się do zera (jeśli obiekt opuści jakąś klasę, to musi pojawić się w innej), to otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{zmiana } N = & \text{ całkowita liczba urodzin w populacji} \\ & - \text{ całkowita liczba śmierci w populacji;} \end{aligned} \quad (4)$$

w szczególności, jeśli rozważamy wyłącznie procesy migracji, to

$$\text{zmiana } N = 0. \quad (5)$$

Zatem, aby model opisujący proces spełniający (2) był uczciwy, jego rozwiązania powinny spełniać prawo zachowania (4) lub (5). Okazuje się jednak, że nie wszystkie procesy są uczciwe, co opiszemy i spróbujemy wyjaśnić w dalszej części artykułu.

Warto też zauważyć, że istnieją sensowne modele populacyjne, których niektóre rozwiązania mogą po pewnym czasie przybierać wartości ujemne. Jest to często interpretowane jako wymarcie populacji startującej z „niekorzystnych” warunków początkowych [2].

### 3.1. Skończenie wymiarowa dynamika populacyjna

Rozważmy najprostsze równanie tego typu, opisujące sytuację, w której osobnik może znajdować się w jednej ze skończonej liczby klas, przejścia zaś z jednej klasy do drugiej opisuje macierz, której współrzędnymi są tempa migracji pomiędzy klasami (*per capita*). Myślimy zatem o populacji podzielonej na  $n$  klas, opisaną przez wektor  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ , w którym  $u_i(t)$  jest liczbą osobników w klasie  $i$  w chwili  $t$ . Klasa może opisywać położenie geograficzne, status finansowy, grupę wiekową, etc. W krótkim okresie czasu  $\Delta t$ , osobnik może przejść z klasy  $i$  do  $j$  z (przybliżonym) prawdopodobieństwem  $p_{ji}\Delta t$ , ale nie może umrzeć, ani opuścić systemu. Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną powyżej, całkowita populacja jest stała.

Przy tych założeniach równanie (2) (z  $x = i$ ) można zapisać w postaci równania różniczkowego

$$u'_i(t) = -u_i(t) \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ji} + \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij} u_j(t), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (6)$$

Równanie to jest prawem zachowania. Po lewej stronie mamy tempo zmian liczebności klasy  $i$ , zaś po prawej mamy wyjaśnienie tych zmian: człon dodatni określa tempo, w jakim osobniki z innych klas przybywają do  $i$ , zaś człon ujemny tempo odpływu z klasy  $i$  do wszystkich innych klas. Zwróćmy uwagę na symetrię – tempo migracji z  $i$  do  $j$  jest takie samo jak tempo napływu do  $j$  z  $i$ , to znaczy, że nic się nie może wydarzyć pomiędzy opuszczeniem  $i$  a dotarciem do  $j$ . Jeśli wprowadzimy macierze

$$\mathcal{K} := -\text{diag} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ji} \right)_{1 \leq i \leq n} + (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} =: \mathcal{A} + \mathcal{B}, \quad (7)$$

to wektor  $u(t)$  spełniać będzie układ równań

$$u' = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u = \mathcal{K}u. \quad (8)$$

Z ogólnej teorii liniowych równań różniczkowych wiemy, że dla dowolnej wartości początkowej  $\hat{u}$  rozwiązanie (8) ma postać

$$u(t) = e^{t\mathcal{K}} \hat{u},$$

zatem warunki Hadamarda 1.–3. są spełnione (warunek 3. wynika z faktu, że  $e^{t\mathcal{K}}$  jest funkcją ciągłą macierzy  $\mathcal{K}$  i operatorem ciągłym działającym na warunek początkowy). Jeśli chodzi o warunek 4., to wpiery zauważmy, że współrzędne macierzy  $\mathcal{K}$  poza przekątną są nieujemne, zatem  $u_i(t) \geq 0$ , jeśli  $\hat{u}_i \geq 0$  dla  $0 \leq i \leq n$ , zob. [13, Proposition VI.1.2] lub [5, Proposition 2.1.4]. Zgodnie z założeniami, całkowita populacja

$$N(t) = u_1(t) + \dots + u_n(t) \quad (9)$$

powinna być niezależna od czasu. Tak jest w istocie, dodając równania w (6) widzimy, że

$$N'(t) = 0,$$

co dowodzi, że model jest formalnie zachowawczy. Jeśli zatem rozwiążemy (8), to okaże się, że suma rozwiązań jest stała, czyli że rozwiązania spełniają formalne równanie zachowania. Rozważmy, na przykład, układ równań

$$\begin{aligned} u'_1 &= -u_1 + u_2, & u_1(0) &= \hat{u}_1, \\ u'_2 &= u_1 - u_2, & u_2(0) &= \hat{u}_2. \end{aligned}$$

Dodając stronami, otrzymujemy

$$\begin{aligned} N'(t) &= u'_1(t) + u'_2(t) = (-u_1(t) + u_2(t)) + (u_1(t) - u_2(t)) \\ &= (-u_1(t) + u_1(t)) + (u_2(t) - u_2(t)) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

skąd  $N(t) = N(0) = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$ , co potwierdza, że układ jest formalnie zachowawczy. Rozwiązując go, mamy

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2} e^{-2t} (1 + e^{2t}) \hat{u}_1 + \frac{1}{2} e^{-2t} (-1 + e^{2t}) \hat{u}_2, \\ u_2(t) &= \frac{1}{2} e^{-2t} (-1 + e^{2t}) \hat{u}_1 + \frac{1}{2} e^{-2t} (1 + e^{2t}) \hat{u}_2, \end{aligned}$$

i widzimy, że

$$u_1(t) + u_2(t) = \dot{u}_1 + \dot{u}_2,$$

a zatem rozwiązania spełniają prawo zachowania populacji.

Powyższe rachunki wyglądają trywialnie, ale pamiętajmy, że wykorzystaliśmy w nich własności matematyczne, takie jak możliwość różniczkowania sumy wyraz po wyrazie, czy też łączność i przemienność dodawania. Są one oczywiste w przypadku skończeniowym, takim jak omawiany powyżej, ale ich stosowanie wymaga znacznej ostrożności w bardziej złożonych sytuacjach, które omówimy w dalszej części artykułu.

### 3.2. Pierwszy krok w nieskończoność

W poprzednim podrozdziale wykazaliśmy, że dynamikę (8) w pełni określa macierz migracji. Jest to cecha układów skończeniowych lub, ogólniej, opisywanych przez macierze reprezentujące operatory ograniczone w odpowiednich przestrzeniach Banacha (w kontekście probabilistycznym mówimy o macierzach intensywności [8, Chapter 2]). Tutaj pokażemy, że jeśli porzucimy założenie ograniczoności, sytuacja może się znacząco pogorszyć.

Będziemy rozważać równania o tej samej strukturze, co poprzednio, to znaczy, opisujące wyłącznie migracje osobników pomiędzy klasami, tym razem jednak będziemy mieli dowolną (ale przeliczalną) liczbę klas indeksowaną wskaźnikiem  $i \in \mathbb{N}$ . Aby uprościć dyskusję, założymy, że migracje mogą odbywać się tylko pomiędzy sąsiednimi klasami, co znaczy, że osobnik z klasy  $i$  może przejść tylko do  $i - 1$  lub do  $i + 1$ . Otrzymujemy wówczas tak zwany układ życia i śmierci,

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -b_1 u_1(t) + d_2 u_2(t), \\ u_n'(t) &= -(d_n + b_n)u_n(t) + b_{n-1}u_{n-1}(t) + d_{n+1}u_{n+1}(t), \quad n \geq 2, \\ u_n(0) &= \dot{u}_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (11)$$

w którym  $u = (u_n)_{n \geq 1}$ , natomiast  $(d_n)_{n \geq 1}$  (z  $d_1 = 0$ ) i  $(b_n)_{n \geq 1}$  są w ogólności nieograniczonymi ciągami liczb nieujemnych. Nazwa pochodzi od interpretacji probabilistycznej modelu, w której  $u_i$  jest prawdopodobieństwem, że populacja składa się z  $i$  osobników; może się ona powiększyć lub zmniejszyć, jeśli jakiś osobnik urodzi się lub umrze. W celu skrócenia zapisu przyjmijmy, że  $b_0 := 0$  i  $u_0 := 0$ . Podobnie, jak w przypadku skończeniowym, będziemy starali się kontrolować całkowitą populację, zatem naszą przestrzenią stanów będzie

$$l_1 = \left\{ u; \|u\|_{l^1} := \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty \right\}.$$

Jak mówiliśmy, struktura prawej strony (11) jest taka sama, jak w (8). Zatem, dodając stronami równania w (11), otrzymamy, jak w (10),

$$\begin{aligned} N' &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} (-(d_n + b_n)u_n + d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1}) \\ &= (-b_1 u_1 + d_2 u_2) + (-(d_2 + b_2)u_2 + b_1 u_1 + d_3 u_3) + \dots \\ &= (-b_1 u_1 + b_1 u_1) + (d_2 u_2 - d_2 u_2) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Tutaj musimy wykazać się sporą ostrożnością, o czym wspomnieliśmy pod koniec poprzedniego podrozdziału. Mianowicie, aby uzyskać powyższy wynik, musieliśmy różniczkować sumę wyraz po wyrazie i zmieniać kolejność sumowania, ale w przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, tutaj zrobiliśmy to w sumach nieskończonych. Aby operacje te były uzasadnione, rozwiązanie  $u$  musi spełniać określone warunki, co w ogólności nie jest oczywiste. Zilustrujemy ten fakt na przykładzie dwóch uproszczonych, choć wciąż nieskończeniowych, wersji (11) opisujących, odpowiednio, wyłącznie proces śmierci i wyłącznie proces urodzin. Wyczerpującą analizę pełnego równania, opartą na ideach fundamentalnego artykułu [16], można znaleźć w [3, Chapter 7] oraz w [8, Sections 2.4.10–16 & 3.4.2–6], gdzie przedstawiony jest bardziej probabilistyczny punkt widzenia.

### 3.2.1. Równanie śmierci – brak jednoznaczności

Rozważmy, dla  $t \geq 0$ , układ równań

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 3^2 u_2(t), \\ u_n'(t) &= -3^n u_n(t) + 3^{n+1} u_{n+1}(t), \quad n \geq 2, \\ u_n(0) &= \dot{u}_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie  $\dot{u} \in l^1$ . Poszukujemy rozwiązania  $u \in l^1$ . Przyjmujemy tutaj założenie, że jakkolwiek będziemy rozumieć rozwiązanie, jego współrzędne muszą spełniać każde równanie w układzie (13).

Wykorzystując metodę czynnika całkującego, możemy przepisać (13) w postaci

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \dot{u}_1 + 3^2 \int_0^t u_2(s) ds, \\ u_n(t) &= e^{-3^n t} \dot{u}_n + 3^{n+1} \int_0^t e^{-3^n(t-s)} u_{n+1}(s) ds, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Aby znaleźć rozwiązanie, wykorzystamy metodę wprowadzoną w [21] i zaczniemy od wyznaczenia rozwiązania  $u^l$  z warunkiem początkowym  $0 \leq \dot{u}^l = (\dot{u}_1, \dots, \dot{u}_l, 0, \dots)$ . Wówczas (14) sprowadza się do skończeniowymiarowego układu

$$\begin{aligned} u_1^l(t) &= \dot{u}_1 + 3^2 \int_0^t u_2^l(s) ds, \\ u_n^l(t) &= e^{-3^n t} \dot{u}_n + 3^{n+1} \int_0^t e^{-3^n(t-s)} u_{n+1}^l(s) ds, \quad 2 \leq n \leq l-1, \\ u_l^l(t) &= e^{-3^l t} \dot{u}_l, \end{aligned} \quad (15)$$

w którym identyfikujemy elementy  $\mathbb{R}^l$  z ich rozszerzeniami za pomocą zer do  $l_1$ . Z różniczkowej wersji równania (15) widzimy, że dla dowolnego  $l \geq 1$ ,  $u^l \geq 0$  oraz  $\|u^l(t)\|_{l_1} \leq \|\dot{u}\|_{l_1}$  dla  $t \geq 0$  (bo równanie (15) nie jest zachowawcze). Ponadto,  $u^{l+1}$  spełnia warunek

$$u_l^{l+1}(t) = e^{-3^l t} \dot{u}_l + 3^{l+1} \int_0^t e^{-3^l(t-s)} u_{l+1}^{l+1}(s) ds,$$

dowodząc, że  $u_l^{l+1}(t) \geq u_l^l(t)$ . Skąd, sukcesywnie rozważając niższe wskaźniki, otrzymujemy  $u^l(t) \leq u^{l+1}(t)$  dla  $t \geq 0$ . Skoro tak, to ciąg  $(\|u^N(t)\|)_{N \geq 1}$  jest ograniczony i niemalejący, a zatem zbieżny. Wykorzystując właściwości normy w  $l_1$ , dla  $k \geq l$  otrzymujemy

$$\|u^k(t) - u^l(t)\|_{l_1} = \left| \|u^k(t)\|_{l_1} - \|u^l(t)\|_{l_1} \right|, \quad k \geq l,$$

a zatem dla każdego  $t \geq 0$  ciąg  $(u^l(t))_{l \geq 1}$  jest ciągiem Cauchy'ego w  $l_1$ . Widzimy więc, że w  $l^1$  istnieje granica

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u^l(t) = u(t) \geq 0. \quad (16)$$

Ustalmy teraz  $n \geq 2$  i weźmy dowolny wskaźnik  $l > n$ . Ponieważ

$$0 \leq u_{n+1}^l(s) \leq \|u^l(s)\|_{l_1} \leq \|\dot{u}\|_{l_1}, \quad 0 \leq s \leq t,$$

twierdzenie o zmajorzowanym przejściu do granicy daje

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \lim_{l \rightarrow \infty} u_n^l(t) = e^{-3^n t} \dot{u}_n + 3^{n+1} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-3^n(t-s)} u_{n+1}^l(s) ds \\ &= e^{-3^n t} \dot{u}_n + 3^{n+1} \int_0^t e^{-3^n(t-s)} u_{n+1}(s) ds. \end{aligned}$$

Pokazuje to, że  $u$  jest ciągłym (a zatem, wobec postaci równania, także różniczkowalnym) po współrzędnych rozwiązaniem (13). Podsumowując, dla



dowolnego  $\dot{u} \in l_1$  znaleźliśmy taką nieujemną funkcję  $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto u(t) \in l_1$ , że  $\|u(t)\|_{l_1} \leq \|\dot{u}\|_{l_1}$  i dla każdego  $n \geq 1$  równanie (13) jest spełnione.

**Uwaga 3.1.** *Skonstruowane rozwiązanie  $u$  ma silniejsze właściwości, w szczególności spełnia zasadę zachowania  $\|u(t)\|_{l_1} = \|\dot{u}\|_{l_1}$ , ale dla celów tego przykładu udowodnione wyniki są wystarczające.*

Z drugiej strony, rozważmy układ równań

$$\begin{aligned} \lambda v_1^\lambda &= 3^2 v_2^\lambda, \\ \lambda v_n^\lambda &= -3^n v_n^\lambda + 3^{n+1} v_{n+1}^\lambda, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (17)$$

z parametrem  $\lambda > 0$ . Dla ustalonego  $v_1^\lambda$  mamy

$$v_n^\lambda = \frac{\lambda v_1^\lambda}{3^n} \prod_{i=1}^{n-2} \left(1 + \frac{\lambda}{3^i}\right), \quad n \geq 2,$$

gdzie, z definicji,  $\prod_{i=1}^0 := 1$ . Jeśli  $v_1^\lambda > 0$ , to  $v_n^\lambda > 0$  dla wszystkich  $n \geq 1$ . Ponadto

ciąg  $v^\lambda := (v_n^\lambda)_{n \geq 1}$  jest rosnący i, ponieważ  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} < \infty$ , mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-2} \left(1 + \frac{\lambda}{3^i}\right) =: P > 0.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^\lambda = v_1^\lambda \left(1 + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \prod_{i=1}^{n-2} \left(1 + \frac{\lambda}{3^i}\right)\right) \leq v_1^\lambda \left(1 + \frac{\lambda P}{6}\right),$$

skąd  $v^\lambda \in l_1$  dla dowolnego  $\lambda > 0$ . Równanie (17) jest stacjonarną wersją (13), zatem

$$v(t) := e^{\lambda t} v^\lambda \quad (18)$$

spełnia (13) po współrzędnych i warunek początkowy  $v(0) = v^\lambda$ . Szacując od dołu, mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^\lambda \geq v_1^\lambda \left(1 + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) = v_1^\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{6}\right),$$

zatem

$$\|v(t)\|_{l_1} \geq e^{\lambda t} v_1^\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{6}\right),$$

więc  $v(t)$  nie jest rozwiązaniem otrzymanym poprzednio, bo tamto miało ograniczoną normę  $l_1$  dla wszystkich  $t \geq 0$ , a to nie.

Widzimy zatem, że traktowanie układu (13) w taki sam sposób jak skończeniowymiarowego układu (6) prowadzi do zagadnienia źle postawionego, nawet w oryginalnym sensie Hadamarda, bo otrzymujemy dwa różne rozwiązania z takimi samymi warunkami początkowymi. Ponieważ nie ma powodu, aby przypuszczać, że (13) reprezentuje jakąś wyjątkową patologię, musimy sprecyzować, co rozumiemy przez jego rozwiązanie. Przykładowo, rozwiązania typu (18) mają rosnącą normę  $l_1$ , czyli opisują niezgodną z założeniami modelu sytuację gdy liczba osobników w populacji rośnie. Takie rozwiązania trzeba odrzucić. Poniżej pokażemy jednak też przykład, w którym wszystkie rozwiązania opisują zmniejszającą się populację, chociaż model jest formalnie zachowawczy.

### 3.3. Proces urodzin – załamanie się praw zachowania

Rozważmy równanie

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -3u_1(t), \\ u_n'(t) &= -3^n u_n(t) + 3^{n-1} u_{n-1}(t), \quad n \geq 2, \\ u_n(0) &= \dot{u}_n \geq 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (19)$$

dla  $t \geq 0$ . W tym przypadku można łatwo skonstruować jedyne nieujemne rozwiązanie (po współrzędnych),

$$u_1(t) = e^{-3t} \dot{u}_1,$$

$$u_n(t) = e^{-3^n t} \dot{u}_n + 3^{n-1} \int_0^t e^{-3^n(t-s)} u_{n-1}(s) ds, \quad n \geq 2.$$

Ponieważ kolumny w układzie (19) sumują się do zera, układ jest formalnie zachowawczy, więc oczekujemy, że rozwiązania będą spełniać

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \|\dot{u}\|_{l_1}. \quad (20)$$

Dla rozwiązań (19) z warunkiem początkowym  $\dot{u} = (1, 0, 0, \dots)$  mamy

$$u_1(t) = e^{-3t},$$

$$u_2(t) = 3e^{-3^2 t} \int_0^t e^{3^2 s - 3s} ds = \frac{3}{3^2 - 3} (e^{-3t} - e^{-3^2 t}) \leq \frac{3}{3^2 - 3} e^{-3t}$$

i rozumowanie indukcyjnie dowodzi, że

$$u_n(t) \leq e^{-3t} \prod_{i=2}^n \frac{3^{i-1}}{3^i - 3} = \frac{e^{-3t}}{3^{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(1 + \frac{1}{3^{i-1} - 1}\right). \quad (21)$$

Widzimy więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=2}^n \left(1 + \frac{1}{3^{i-1} - 1}\right) =: P < \infty,$$

przy czym zbieżność jest monotoniczna, zatem

$$\|u(t)\|_{l_1} \leq e^{-3t} \left(1 + P \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}\right) = e^{-3t} \left(1 + \frac{P}{2}\right).$$

Stąd wynika, że  $u \in l_1$ , lecz równość (20) nie jest spełniona dla dużych  $t$ .

Tutaj, w przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, nie mamy nawet możliwości wybrania rozwiązania, które jest uczciwe, czyli spełnia warunek 4. definicji zagadnienia dobrze postawionego. Poniżej wyjaśnimy powyższe problemy w ramach teorii układów dynamicznych.

## 4. Pomiedzy modelem a jego analiza

Przykłady omówione powyżej pokazują, że w sytuacji nieskończeniowymiarowej sformułowanie (1) nie jest wystarczająco precyzyjne do tego, aby umożliwić sensowną analizę modelu i w szczególności może prowadzić do zagadnienia źle postawionego. Jak wspomnieliśmy wcześniej, aby takie modele analizować, musimy je starannie zinterpretować w odpowiednim środowisku matematycznym, pilnując jednak, by nie stracić z oczu istotnych cech sformułowania oryginalnego. Zatem rozwijana teoria powinna wyjaśniać i w miarę możliwości korygować opisane wyżej patologie w kontekście modelowanych zjawisk.

Przypomnijmy tutaj, że modelowanie matematyczne, jak również proces tworzenia teorii matematyzującej model, nie jest matematyką, ale polegają na wykonaniu szeregu przemyślanych kroków identyfikujących składowe modelu z odpowiednimi strukturami matematycznymi i związkami między nimi. Ostateczny produkt nie musi być jednoznaczny – możemy zbudować różne teorie matematyczne formalizujące (1) – ale dopiero gdy to zrobimy możemy zacząć mówić o matematycznej analizie obiektu powstałego z odpowiedniego przeformułowania modelu.

Poniżej omówimy jedną z takich matematyzacji równania (1), opisaną w [6, Section 4.1]. Wspomnieliśmy wcześniej, że rozwiązania zagadnienia (1), opisujące ewolucję systemu, reprezentuje rodzina operatorów  $(\mathcal{G}(t))_{t \geq 0}$ , parametryzowana przez czas, którą nazywamy półgrupą operatorów. Operatory

te działają w odpowiedniej przestrzeni stanów  $X$ . Innymi słowy, dla danego stanu początkowego  $\dot{u} \in X$  rozwiązania dane są wzorem

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\dot{u}. \quad (22)$$

Odnotujmy tutaj, że identyfikujemy funkcję dwóch zmiennych,  $(t, x) \mapsto u(t, x)$ , z funkcją jednej zmiennej  $t \rightarrow u(t)$ , która przyjmuje wartości w przestrzeni stanów  $X$  funkcji zmiennej  $x$  (w naszych przykładach  $x$  jest zmienną dyskretną  $n \in \mathbb{N}$ ).

Jak wyjaśniliśmy wcześniej, naturalnym wymaganiem jest by  $X$  była przestrzenią Banacha. Jej wybór zależy w dużej mierze od nas i jest podyktowany z jednej strony fizyczną interpretacją modelu, a z drugiej wygodą matematyczną. Przykładowo, w naszych rozważaniach powyżej byliśmy głównie zainteresowani wielkością populacji i dlatego wybraliśmy  $l^1$  jako przestrzeń stanów (w przypadku zmiennej ciągłej  $x$  byłyby to przestrzeń  $L^1$ ). Okazuje się, że badając długoczasowe zachowanie rozwiązań wygodnie jest używać przestrzenie typu  $l^1$  ( $L^1$ ) z wagą daną za pomocą wektora własnego zagadnienia sprzężonego [11], z kolei w przestrzeniach ze skończonymi wyższymi momentami rozwiązania można dowodzić znacznie silniejszych wyników, niż w standardowych przestrzeniach  $l^1$  ( $L^1$ ), zob. [6, Chapters 5 & 8].

Wybór przestrzeni stanów oczywiście nie wystarcza – wszystkie nasze patologiczne przykłady są umieszczone w przestrzeni  $l^1$ , w której można skonstruować przykłady podobne, będące jednak zagadnieniami dobrze postawionymi. Problem tkwi w wyrażeniu  $\mathcal{K}$ .

Wybrawszy zatem przestrzeń stanów  $X$ , użyjemy  $\mathcal{K}$  aby zdefiniować operator  $K : D(K) \rightarrow X$ ;  $D(K)$  jest tu podprzestrzenią  $X$ , zwaną dziedziną  $K$ . Jeśli chcemy, aby cała ewolucja odbywała się w przestrzeni stanów  $X$ , to  $D(K)$  musi przynajmniej spełniać warunek

$$x \rightarrow [\mathcal{K}u](x) \in X \text{ dla } u \in D(K). \quad (23)$$

Na ogół na  $D(K)$  nakładamy jeszcze inne warunki i każdy otrzymany w ten sposób operator  $(K, D(K))$  nazywamy realizacją wyrażenia  $\mathcal{K}$ . W szczególności realizację na dziedzinie (23) nazywamy operatorem maksymalnym, który omówimy poniżej.

Używając definicji  $K$ , możemy zapisać (1) jako zagadnienie Cauchy’ego dla zwyczajnego równania różniczkowego w przestrzeni  $X$ : znaleźć funkcję  $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto u(t) \in D(K)$ , która jest różniczkowalna w normie  $X$  dla  $t > 0$  i spełnia

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Ku, \quad t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(0) &= \dot{u} \in X. \end{aligned} \quad (24)$$

Niestety, podana definicja  $D(K)$  na ogół nadal nie wystarcza, aby zagadnienie (24) było dobrze postawione. Aby zrobić następny krok w tym kierunku, skupmy się na zagadnieniu (11). Podobnie do (7) wprowadzimy macierz przekątniową  $\mathcal{A}$ , zdefiniowaną jako  $\mathcal{A}u = -((b_n + d_n)u_n)_{n \geq 1}$  oraz  $\mathcal{B}u = (b_{n-1}u_{n-1} + d_{n+1}u_{n+1})_{n \geq 1}$  (pamiętajmy, że  $b_0 = u_0 = 0$ ). Zauważmy, że  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  można rozważać jako operatory działające w przestrzeni wszystkich ciągów  $l_0$ .

Przypuszczalnie operatorem najbliższym do formalnego wyrażenia  $\mathcal{K} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  jest operator maksymalny  $K_{\max}$ , wprowadzony powyżej, zaś tutaj zdefiniowany jako  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  obcięty do

$$D(K_{\max}) := \{u \in l_1; \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \in l_1\}.$$

Zauważmy, że jest możliwe, iż dla  $u \in D(K_{\max})$  ani  $\mathcal{A}u$ , ani  $\mathcal{B}u$  z nie należą do  $l_1$ .

Inny naturalny wybór to dziedzina złożona z  $u$ , dla których zarówno  $\mathcal{A}u$  jak i  $\mathcal{B}u$  należą do  $l_1$  dla  $u$  z tej dziedziny. Ma to sens, gdyż  $\mathcal{A}u$  i  $\mathcal{B}u$  opisują konkretne procesy i chcielibyśmy, aby wyniki tych procesów „żyły” w przestrzeni stanów. Zdefiniujmy zatem  $A$  jako  $\mathcal{A}|_{D(A)}$  na

$$D(A) := \left\{ u \in l_1; \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)|u_n| < \infty \right\}. \quad (25)$$

Wówczas, dla dowolnego  $0 \leq u \in D(A)$ , podobnie jak w (12) mamy

$$\|\mathcal{B}u\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} (d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n u_n + b_n u_n) = \|Au\|_{l_1}; \quad (26)$$

tym razem zmiana kolejności sumowania jest uzasadniona bezwzględną sumowalnością wynikającą z (25). Z liniowości wynika, że operator  $B = \mathcal{B}|_{D(A)}$  jest dobrze zdefiniowany i możemy wprowadzić

$$K_{\min} := (\mathcal{A} + \mathcal{B})|_{D(A)} = A + B;$$

tu oba operatory po prawej stronie działają w  $l_1$ . Operatory  $K_{\max}$  i  $K_{\min}$  są szczególnymi realizacjami wyrażenia  $\mathcal{K}$ .

**Przykład 4.1.** Spróbujmy wyjaśnić, dlaczego poświęcamy tyle uwagi dziedzinie operatora pojawiającego się w (24). Okazuje się, że jest ona silnie związana z tym, czy zagadnienie jest dobrze postawione. Jeśli rozwiązanie  $u$  równania (24) spełnia warunek  $0 \leq u(t) \in D(K_{\min}) = D(A)$ , to, dzięki różniczkowalności  $u$  w  $l_1$ , mamy

$$\partial_t \|u(t)\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} (Au + Bu)_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (Au)_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (Bu)_n(t) = 0 \quad (27)$$

i całkując po czasie widzimy, że równość (12) jest prawdziwa, a to znaczy, że wielkość populacji się nie zmienia i rozwiązanie jest uczciwe.

Rozwiązania pozostają uczciwe, jeśli spełniają słabszy warunek  $u(t) \in D(\overline{K_{\min}})$  dla  $t \geq 0$ , w którym domknięcie operatora,  $\overline{K_{\min}}$ , jest zdefiniowane wzorem

$$\overline{K_{\min}}u = \lim_{k \rightarrow \infty} (Au_k + Bu_k),$$

dla  $D(K_{\min}) \ni u_k \rightarrow u \in D(\overline{K_{\min}})$ , pod warunkiem, że obydwie granice istnieją. Łatwo wtedy dostrzec, że jeśli  $u(t) \in D(\overline{K_{\min}})$  dla dowolnego  $t \geq 0$ , to

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((\overline{A + B})u)_n(t) = 0 \quad (28)$$

i równość (12) pozostaje prawdziwa.

Problemem pozostaje sprawdzenie, czy z  $\dot{u} \in D(\overline{K_{\min}})$  wynika  $u(t) \in D(\overline{K_{\min}})$  dla  $t > 0$ .

Ogólne pytanie brzmi, czy w ogóle można znaleźć taką realizację  $K$ , że rozwiązania  $u$  wychodzące z wartości początkowych  $\dot{u} \in D(K)$  pozostają w  $D(K)$  dla  $t > 0$  i są różniczkowalne w  $X$ , dzięki czemu równanie (24) ma sens. Taką realizację  $K$  nazywamy (infinitesimalnym) generatorem naszego układu dynamicznego (półgrupy). Jak wyjaśnimy poniżej, taką właśnie realizację wyrażenia  $\mathcal{K}$  narzuca teoria półgrup, o ile chcemy, by zagadnienie (24) było dobrze postawione w sensie Hadamarda.

Właściwości, których oczekujemy od półgrupy możemy zebrać w następującej definicji.

**Definicja 4.2.** Rodzinę  $(G(t))_{t \geq 0}$  operatorów liniowych ciągłych na przestrzeni Banacha  $X$  nazywamy półgrupą klasy  $C_0$  lub półgrupą silnie ciągłą, jeśli

- (i)  $G(0) = I$ ;
- (ii)  $G(t + s) = G(t)G(s)$  dla wszystkich  $t, s \geq 0$ ;
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t)u = u$  dla każdego  $u \in X$ .

Operator liniowy  $K$  nazywamy (infinitesimalnym) generatorem półgrupy  $(G(t))_{t \geq 0}$ , jeśli

$$Ku = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)u - u}{h} \quad (29)$$

dla  $u \in D(K)$  a dziedzina  $D(K)$  jest zbiorem wszystkich  $u \in X$  dla których powyższa granica istnieje.

Zauważmy, że z (ii)–(iii) wynika, iż dla  $u \in D(K)$  i  $t \geq 0$  prawostronna (jak i lewostronna, zob. [20, Theorem 1.2.4]) pochodna  $t \mapsto G(t)u$  jest dana wzorami

$$\begin{aligned} \partial_t G(t)u &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(t+h)u - G(t)u}{h} = G(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)u - u}{h} = G(t)Ku \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(h)G(t)u - G(t)u}{h} = KG(t)u. \end{aligned} \quad (30)$$

Zatem, dla każdego  $u \in D(K)$  i  $t \geq 0$ ,  $G(t)u \in D(K)$ ,  $t \mapsto G(t)u$  jest różniczkowalna w  $X$  i spełnia (24).

Zauważmy też, że rozwiązania dane przez półgrupę są jednoznaczne i, ponieważ operatory  $G(t)$  są ciągle, zależą w sposób ciągły od danych początkowych. Ponadto warunek (ii) opisuje zasadę przyczynowości – stan układu w chwili  $t$  zależy wyłącznie od stanu początkowego, a nie zależy od stanów pośrednich. Możemy zatem stwierdzić, że zagadnienie Cauchy’ego (24), w którym realizacja  $K = K$  jest generatorem półgrupy silnie ciągłej i  $\dot{u} \in D(K)$ , jest dobrze postawione w sensie Hadamarda.

Charakteryzacji generatorów jest poświęcone twierdzenie Hilla-Yosidy (choć tak naprawdę powinniśmy dodać tutaj jeszcze nazwiska Fellera, Miyadery i Phillipsa, zob. [12, Section II.3]).

**Twierdzenie 4.3.** *Operator  $(K, D(K))$  jest generatorem półgrupy klasy  $C_0$   $(G(t))_{t \geq 0}$  spełniającej warunek  $\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}$  dla pewnych  $M \geq 1$  i  $\omega \in \mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $K$  jest operatorem domkniętym i gęsto określonym, operator odwrotny  $(\lambda I - K)^{-1}$  istnieje dla wszystkich  $\lambda > \omega$  oraz dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\|(\lambda I - K)^{-n}\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n}.$$

Twierdzenie to ma w dużej mierze charakter teoretyczny, gdyż wykazanie potrzebnego oszacowania jest niemal niewykonalne poza przypadkiem  $M = 1$ . W praktyce z reguły korzystamy z metod perturbacyjnych, rozbijając  $K$  na składniki, z których jeden jest na tyle prosty, aby można było zastosować do niego twierdzenie Hilla-Yoshidy, zaś pozostałe są mu w jakiś sposób podporządkowane. Różne metody tego typu są opisane w [3, 6]. Należy tu jeszcze podkreślić, że równanie (1) może mieć w tej samej przestrzeni  $X$  wiele realizacji (24), w których  $K$  jest generatorem półgrupy, zob. [6, Theorem 4.10.28] lub [23, Theorem 4.4.8]. Dopiero jeśli taką realizację ustalimy, możemy mówić o jednoznaczności rozwiązań (półgrupowych).

Zauważmy jednak, że niejednoznaczność rozwiązań opisana w podrozdziale 3.2.1 jest innego rodzaju, gdyż odejmując rozwiązania (16) i (18) wychodzące z  $v^\lambda$  otrzymujemy niezerowe rozwiązanie z zerowym warunkiem początkowym. Takie rozwiązanie nie może być rozwiązaniem półgrupowym. Okazuje się, że istnienie takich rozwiązań i pojawienie się nieuczciwości związane są z umiejscowieniem  $K$  względem operatorów  $K_{\min}$  i  $K_{\max}$ .

W rozważanych tutaj przykładach zachodzą zawierania  $K_{\min} \subset \overline{K_{\min}} \subset K \subset K_{\max}$ , patrz [3, Theorem 6.20] (choć w pewnych sytuacjach można skonstruować generatory, które nie mają tej właściwości, zob. [6, Theorem 4.10.28] lub [23, Theorem 4.4.8]). Ponadto wszystkie poniższe zawierania są możliwe:

1.  $K_{\min} = K = K_{\max}$ ,
2.  $K_{\min} \subsetneq K = \overline{K_{\min}} = K_{\max}$ ,
3.  $K_{\min} = K \subsetneq K_{\max}$ ,
4.  $K_{\min} \subsetneq K = \overline{K_{\min}} \subsetneq K_{\max}$ ,
5.  $\overline{K_{\min}} \subsetneq K \subsetneq K_{\max}$ .

Każdy z powyższych przypadków ma swoją interpretację w kontekście pytania, czy zagadnienie (24) jest dobrze postawione. Aby to wyjaśnić, przypomnijmy, że (24) z  $K = K_{\max}$  jest matematyzacją (1), która jest najbliższą oryginalnemu sformułowaniu modelu, gdyż jedynym warunkiem narzuconym na  $K$  jest to, by działał on w przestrzeni stanów.

Jeśli  $K \subsetneq K_{\max}$ , to nie mamy jednoznaczności rozwiązań w tym sensie, że istnieją różniczkowalne w  $X$  rozwiązania (24) z  $K = K_{\max}$ , które wychodzą z zera, a zatem nie mogą być dane przez półgrupę. Rozwiązania skonstruowane w podrozdziale 3.2.1 są właśnie tego rodzaju.

Z drugiej strony, jeśli nie zachodzą warunki przykładu 4.1, czyli jeśli  $\overline{K_{\min}} \subsetneq K$ , to nawet gdy model jest formalnie zachowawczy, jak w (12), rozwiązania zachowawcze być nie muszą – obserwujemy niekontrolowany odpływ osobników z systemu.

Podsumowując, idealnie powinniśmy mieć  $K_{\min} = K = K_{\max}$  lub  $K = \overline{K_{\min}} = K_{\max}$ , gdyż wtedy zagadnienie (24) z  $K = K_{\max}$ , które jest najbliższe oryginalnemu sformułowaniu modelu, jest dobrze postawione w sensie Hadamarda i uczciwe (dodatniość rozwiązań udowodnić należy osobno, ale można to zrobić rozpatrywanych tutaj przykładach).

Dowody powyższych stwierdzeń wymagają zaawansowanych metod analizy funkcjonalnej, które wykraczają poza ramy tego artykułu. Można je znaleźć w [3, 6] i, dla modeli o stanach dyskretnych w kontekście probabilistycznym, w [8].

## Podsumowanie

W niniejszym artykule postaraliśmy się wyjaśnić paradoksalne czy wręcz patologiczne właściwości niektórych układów dynamicznych, takie jak załamanie się zasad zachowania w modelach formalnie zachowawczych lub istnienie rozwiązań wielokrotnych. Problemy te zostały zilustrowane na przykładzie równań typu Kołmogorowa, ale warto podkreślić, że pojawiają się one i mogą być wyjaśnione w ramach tej samej teorii także w równaniach fragmentacji, równaniach transportu i dyfuzji, równaniach kinetycznych, oraz w ogólnych procesach Markowa [1, 3, 6, 7, 8, 14, 15, 18]. Niektóre z wymienionych tu prac poświęcone są zachowaniu się półgrup na przestrzeni funkcji ciągłych, w których dualność względem przestrzeni funkcji całkowalnych prowadzi do następującej definicji: półgrupa  $(G(t))_{t \geq 0}$  jest uczciwa, jeśli dla każdego  $t \geq 0$  spełniony jest warunek  $G(t)1 = 1$ , w którym 1 jest funkcją tożsamościowo równą jedności. Obiekty o tej własności są przedmiotem intensywnych badań w teorii dynamicznych półgrup kwantowych (quantum dynamical semigroups) [9].

Głównym przesłaniem zaprezentowanego artykułu jest to, że większość opisywanych patologii pojawia się na styku budowy modelu i jego matematycznej analizy, a wynika z braku precyzyjnego zapisania modelu jako obiektu matematycznego. Brak takiej precyzji i stosownej analizy może sprawić, że metody numeryczne i przybliżone przedstawiać będą zupełnie błędny obraz modelu.

## Literatura

- [1] J. Banasiak. On  $L_2$ -solvability of mixed boundary value problems for elliptic equations in plane nonsmooth domains. *J. Differential Equations*, 97(1):99–111, 1992.
- [2] J. Banasiak. Population models with projection matrix with some negative entries – a solution to the Natchez paradox. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 11(3):18–28, 2018.
- [3] J. Banasiak, L. Arlotti. *Perturbations of positive semigroups with applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2006.
- [4] J. Banasiak, A. Falkiewicz, P. Namayanja. Asymptotic state lumping in transport and diffusion problems on networks with applications to population problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(2):215–247, 2016.
- [5] J. Banasiak, M. Lachowicz. *Methods of small parameter in mathematical biology*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser/Springer, Cham, 2014.
- [6] J. Banasiak, W. Lamb, P. Laurençot. *Analytic methods for coagulation-fragmentation models*, volume 1& 2. CRC Press, 2019.
- [7] J. Banasiak, S. C. Oukouomi Noutchie, R. Rudnicki. Global solvability of a fragmentation-coagulation equation with growth and restricted coagulation. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 16(suppl. 1):13–26, 2009.
- [8] A. Bobrowski. *Generators of Markov Chains: From a Walk in the Interior to a Dance on the Boundary*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2020.

- [9] A. M. Chebotarev, F. Fagnola. Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups. *J. Funct. Anal.*, 153(2):382–404, 1998.
- [10] M. R. Dennis, P. Glendinning, P. A. Martin, F. Santosa, J. Tanner, editors. *The Princeton companion to applied mathematics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015.
- [11] M. Doumic Jauffret, P. Gabriel. Eigenelements of a general aggregation-fragmentation model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(5):757–783, 2010.
- [12] K.-J. Engel, R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [13] K.-J. Engel, R. Nagel. *A short course on operator semigroups*. Universitext. Springer, New York, 2006.
- [14] W. Feller. Boundaries induced by non-negative matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 83:19–54, 1956.
- [15] W. Feller. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. *Ann. of Math. (2)*, 65:527–570, 1957.
- [16] T. Kato. On the semi-groups generated by Kolmogoroff’s differential equations. *J. Math. Soc. Japan*, 6:1–15, 1954.
- [17] J. L. Lebowitz, S. I. Rubinow. A theory for the age and generation time distribution of a microbial population. *J. Math. Biol.*, 1(1):17–36, 1974/75.
- [18] G. Metafune, D. Pallara, M. Wacker. Feller semigroups on  $\mathbf{R}^N$ . *Semigroup Forum*, 65(2):159–205, 2002.
- [19] A. Okubo, S. A. Levin. *Diffusion and ecological problems: modern perspectives*, volume 14 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001.
- [20] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [21] G. E. H. Reuter, W. Ledermann. On the differential equations for the transition probabilities of Markov processes with enumerably many states. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 49:247–262, 1953.
- [22] M. Rotenberg. Transport theory for growing cell populations. *J. Theoret. Biol.*, 103(2):181–199, 1983. 27
- [23] C. P. Wong. *Kato’s Perturbation Theorem and Honesty Theory*. PhD thesis, University of Oxford, 2015. 28