Takie myślenie, gdy raz się zaczyna z ojca krwią spada dziedzictwem na syna

Adam BOBROWSKI, Lublin*

George (György) Pólya
In order to solve a differential equation you look at it till a solution occurs to you

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LXI Szkole Matematyki Poglądowej, *Matematyczne zmiany*, Wola Ducka, luty 2020.
Redakcja

Chciałbym tu opowiedzieć o dwóch analitycznych rozwiązaniach, które – w czasie odpowiednim dla młodego wtedy człowieka – zachwyciły mnie swą elegancją, estetycznie oczarowały, przez lata stanowiły pożywkę dla – chyba zatem chłonnego – umysłu i przez to w dużej mierze ukształtowały mnie jako matematyka. Bez nich bez wątpienia byłbym inny.

Gramatycznie rzecz biorąc, „nich" odnosi się tu do rozwiązań, ale precyzyjniej – i grzeczniej – byłoby napisać „Nich", mając na myśli moich Nauczycieli, Profesorów Adama Bieleckiego i Jana Kisyńskiego. Taka, drobna na pozór, zmiana prowadzi nas też do głównej refleksji niniejszego eseju, jakby podskórnej rzeki płynącej przez cały tekst. Z bliskiego memu sercu punktu widzenia fakt, że Adam Feliks Bielecki był promotorem doktoratu Jana Marii Kisyńskiego nie wydaje się przypadkiem: umysły widzące matematyczne obiekty w pewien specyficzny, fascynujący dla mnie, sposób zdają się przyciągać. Być może też, że – tak jak u Byrona, którego mickiewiczowskie tłumaczenie pozwoliłem sobie w tytule sparafrazować – jakiś rodzaj „krwi" wybitny nauczyciel przekazuje uczniowi.

Jako uzupełnienie myśli o „spadającym na nas" naukowym dziedzictwie opiszę też rozwiązanie trzecie, pochodzące ode mnie, jednego z wielu matematycznych „wnuków" Profesora Bieleckiego i członka trochę mniej licznej grupy figuratywnych „synów" (w tym także „córek") Profesora Kisyńskiego. Zdecydowałem się na ten dodatek nie dlatego oczywiście, że uważam, iż mój pomysł jakoś tamtym poprzednim dorównuje. Nie, Wojciech Młynarski zachęcał kiedyś śpiewając: „skromniutko, ot, na własną miarkę, majstrujmy coś" i mój wynik jest tylko na taką moją miarkę skrojony, bez niego jednak historia nie byłaby pełna. Zachęcają mnie też do jego prezentacji dwa fakty. Po pierwsze, „mój" pomysł jest w istocie tylko rozwinięciem idei pochodzącej od absolutnego giganta, Williama Thomsona, znanego szerzej jako Lord (Baron) Kelvin; idei pięknej, głębokiej i godnej rozpowszechniania. Po drugie, jest spora szansa, że jakiś prawnuk Profesora Bieleckiego dopisze dalszy ciąg tej zdumiewającej opowieści o umiejętnościach ludzkiego umysłu, dopełniając ją.

Istnieje też pewna analogia między podskórnym tematem tego eseju a fragmentem Drugiego Listu Świętego Pawła do Tymoteusza, którą warto tu zanotować. Jego autor pisze (cytuję za Biblią Tysiąclecia): „to, co usłyszałeś ode mnie za pośrednictwem wielu świadków, przekaż wiarygodnym ludziom, którzy będą zdolni nauczać też innych". Widzimy w tym tekście pięć pokoleń tych, którzy poznali pewną tajemnicę, pewną umiejętność: Pawła, „pośredników", Tymoteusza, „ludzi wiarygodnych i zdolnych", oraz wreszcie tych, których ci wiarygodni będą nauczać. Analogia to zapewne, jeśli wziąć pod uwagę ciężar gatunkowy przekazywanych umiejętności i wiedzy, daleka, ale czytelna.

1. Ojciec

1.1. Proseminarium

Profesora Bieleckiego poznałem jako student trzeciego roku studiów matematycznych na UMCS. Po świeżości pełnego wydarzeń roku pierwszego, drugi przytłoczył mnie ciężarem technicznej analizy wielowymiarowej

*Politechnika Lubelska, a.bobrowski@pollub.pl

i monotonią abstrakcyjnej algebry. Brak mi w tym wszystkim było jakiejś przewodniej idei, która mogłaby mnie pociągnąć, zachwycić. Rok trzeci więc, ze świetnym, nowoczesnym, opartym na teorii miary wykładem rachunku prawdopodobieństwa prof. Zdzisława Rychlika, z jedyną w swoim rodzaju analizą funkcjonalną prof. Tadeusza Leżańskiego i proseminarium, które prowadził prof. A. Bielecki był prawdziwą odmianą. W tym samym mniej więcej czasie spotkałem też prof. Andrzeja Lasotę, ale to już zupełnie inna historia.

O Profesorze Bieleckim wiedziałem niewiele ponad to, że był nestorem lubelskiej matematyki, osobą wielce szanowaną. Nie kojarzyłem nawet faktu, że doktoryzował się u Witolda Wilkosza, jednego z trzech krakowskich przyjaciół, z których dwóch, Stefana Banacha i Ottona Nikodyma, spotkał Hugo Steinhaus rozprawiających o matematyce na słynnej ławeczce na krakowskich plantach. Pamiętam, że wszedłszy (z nieodłączną gąbką i pojemniczkiem na wodę w ręce) na pierwsze zajęcia Profesor napisał na tablicy równanie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax(t), \qquad x(0) = u$$

i polecił nam je rozwiązać. Nie podejrzewając haczyka podszedłem i bez namysłu napisałem:

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}u, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Na co Profesor rzekł: „Ależ nie o to chodzi! Proszę przepisać równanie w postaci całkowej i rozwiązać je metodą kolejnych przybliżeń” (zob. podrozdział 2.1.1). Tak od szczegółu do ogółu wprowadzał nas przez kolejne zajęcia w tajniki różnych rodzajów coraz bardziej skomplikowanych zagadnień, z których niemal wszystkie dało się rozwikłać wspomnianą wyżej metodą, a rozwikłanie to było czymś daleko więcej niż znajomością rachunków. To wtedy właśnie też po raz pierwszy usłyszałem o normie, którą dziś wszyscy nazywają normą Bieleckiego [11], a która jest głównym tematem pierwszej części niniejszego tekstu.

1.2. Zasada Banacha

W ramach wstępu do jej opisu chciałbym wyjaśnić, że jednym z poruszanych w trakcie proseminarium zagadnień było teoretyczne uzasadnienie dlaczego metoda kolejnych przybliżeń działa, i tu oczywiście odwołaliśmy się do zasady łączonej powszechnie z nazwiskiem Banacha (choć, jak twierdzą ludzie mądrzy, Banach raczej nie byłby szczęśliwy, że przypisuje mu się wynik tak elementarny, bo „zmajstrował” rzeczy znacznie ciekawsze). Mówi ona, przypomnijmy, że jeśli $(\mathbb{X}, d)$ jest przestrzenią metryczną zupełną i jeśli dla danego odwzorowania $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ można tak dobrać $q \in [0, 1)$, by

$$d(Tx, Ty) \leqslant q\, d(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{X}, \tag{1}$$

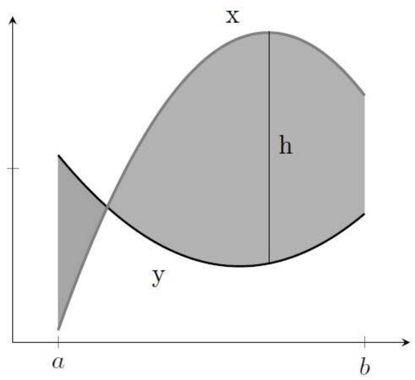
to istnieje dokładnie jeden taki punkt $x^* \in \mathbb{X}$, zwany punktem stałym, że $Tx^* = x^*$. Co więcej, dla dowolnego $x \in \mathbb{X}$, wspomniany punkt można uzyskać jako granicę

$$x^* = \lim_{n\to\infty} T^n x.$$

Zasada ta, choć nieskomplikowana, wymaga pewnych wyjaśnień (dla tych, którzy widzą ją po raz pierwszy, lub nie mieli dotychczas okazji przyjrzeć jej się dokładniej). Po pierwsze, jej kluczowym założeniem jest zupełność pary $(\mathbb{X}, d)$.

Innymi słowy, $\mathbb{X}$ nie może mieć „dziur”, co formalnie wyraża się stwierdzeniem, że każdy ciąg Cauchy'ego jest w $\mathbb{X}$ zbieżny. Na przykład koło (lub wręcz odcinek) z wyrzuconym środkiem (i standardową, euklidesową odległością na płaszczyźnie lub prostej) przestrzenią zupełną nie jest, nie jest nią też koło bez okręgu, bo „ma dziury na brzegu”. Wagę tego założenia widać w dowodzie, który polega na sprawdzeniu, że dla każdego $x \in \mathbb{X}$ ciąg $(T^n x)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego, co na podstawie zupełności pozwala stwierdzić istnienie jego granicy: to, że granicą tą musi być punkt stały odwzorowania T jest już łatwe; łatwo też przekonać się, że taki punkt może być tylko jeden. Ale i bez patrzenia na dowód można stosunkowo nietrudno wymyślić odwzorowania, które będą spełniały pozostałe założenia zasady Banacha, ale nie będą miały punktu stałego, bo przestrzeń, w których zostały zdefiniowane nie jest zupełna.

Po drugie, choć intuicje o $(\mathbb{X}, d)$ czerpiemy pełnymi garściami z prostej, płaszczyzny i przestrzeni trójwymiarowej, w najważniejszych zastosowaniach $\mathbb{X}$ jest złożona z funkcji. To podstawowa idea współczesnej analizy funkcjonalnej, która odchodzi od znanej nam ze szkoły „dynamicznej" definicji funkcji jako odwzorowania, a widzi ją raczej jako element *zbioru funkcji*, które można do siebie dodawać i mnożyć przez skalary. Dodatkowo, poprzez identyfikację funkcji z jej wykresem, można też mierzyć odległości między nimi, na przykład przyjmując, że odległością jest wysokość najdłuższego pionowego odcinka łączącego wykresy, lub pole tymi wykresami ograniczone (patrz rysunek 1).



Rys. 1. Dwie (z wielu możliwych) odległości między wykresami funkcji x i y, zdefiniowanych na przedziale $[a, b]$. Pierwsza z nich, oznaczona na rysunku jako h, znana jest jako metryka supremum i pasuje na przykład do funkcji ciągłych. Druga, równa zacieniowanemu polu jest metryką typu L^1 i pasuje do funkcji całkowalnych.

Jeśli odległość tę dobierzemy stosownie do zbioru funkcji (tak jak blondynki nakładają raczej sukienki niebieskie, a kobiety o płomiennych włosach – zielone), to para (zbiór, odległość) stanie się kompletna, zupełna, nic dodać, nic ująć. Przestrzeń i odległość będą do siebie pasować jak ulał. Dla naszych potrzeb wystarczy jeden przykład: przestrzeń

$$\mathbb{X} = C[a, b]$$

funkcji ciągłych, o wartościach powiedzmy w $\mathbb{R}^n$ (przy ustalonym n), zdefiniowanych na domkniętym odcinku $[a, b]$ (oczywiście $a < b$), z metryką

$$d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|. \tag{2}$$

Jest ona w istocie czymś znacznie więcej niż tylko przestrzenią metryczną zupełną: jest przestrzenią Banacha, bo jak wspomniałem wcześniej, funkcje można do siebie dodawać i mnożyć przez liczby (skalary). Rozważane tu funkcje można też traktować jak wektory (czy to na płaszczyźnie, czy w przestrzeni) i przypisywać im „długość", zwaną normą, o tak:

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|,$$

a wtedy wzór (2) przyjmie postać

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Podsumowując ten krótki kurs analizy funkcjonalnej podkreślmy raz jeszcze, że dla jej adeptów własności pojedynczych funkcji, takie jak monotoniczność, różniczkowalność, czy ilość miejsc zerowych są marginalne. Abstrahują oni od tego, czy patrzą na wykres przedstawiający dynamikę cen akcji na giełdzie, czy poziomu glukozy u pacjenta. Funkcję ciągłą widzą raczej jako element przestrzeni funkcji ciągłych i z własności tej ostatniej, a nie z własności pojedynczych funkcji, wnioskują na przykład o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych.

1.3. Równania różniczkowe i zasada Banacha

Teraz już możemy wyjaśnić jak zasada Banacha wiąże się z równaniami różniczkowymi. Dla ustalenia uwagi zajmijmy się następującym zagadnieniem, które jest pokrewne, choć nie tożsame z tym stawianym w twierdzeniu Piccarda:

mając dane $u \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$ oraz globalnie lipschitzowską funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, to znaczy taką, że dla pewnej stałej L i dowolnych $v, v' \in \mathbb{R}^n$ zachodzi oszacowanie

$$|f(v) - f(v')| \leqslant L|v - v'|,$$

zbadać czy istnieje takie $h > 0$ i taka funkcja $x : [t_0, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$, że zachodzi równość

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t)), \qquad t \in [t_0, t_0 + h] \tag{3}$$

i spełniony jest warunek początkowy $x(t_0) = u$; odpowiedzieć też na pytanie, czy taka funkcja x jest tylko jedna i jak duże może być h.

Współczesny matematyk podejmujący się tego zadania, stojąc na barkach gigantów, od których się poniższej metody nauczył, przede wszystkim całkuje powyższe równanie, używając przy tym warunku początkowego i sprawdza, że otrzymana postać całkowa

$$x(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h],$$

o którą przed laty prosił mnie Profesor Bielecki, równoważna jest zagadnieniu wyjściowemu (sprawdzić to trzeba; w szczególności istotne jest to, że ciągła funkcja x spełniająca to równanie całkowe jest automatycznie różniczkowalna). Następnie rozważa omówioną wyżej przestrzeń $C[t_0, t_0 + h]$, dla nieznanego mu jeszcze h, o której wie, że jest zupełna, oraz odwzorowanie T tej przestrzeni w siebie, dane wzorem

$$(Tx)(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, t_0 + h]. \tag{4}$$

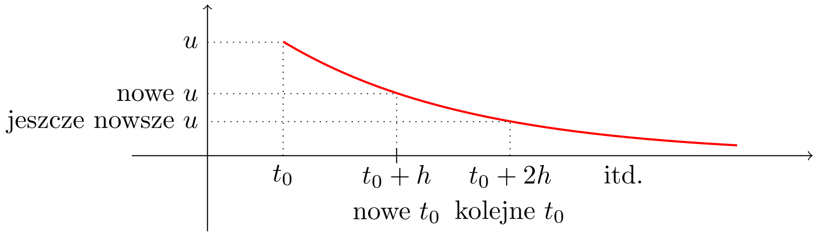
Stwierdza także, że każde rozwiązanie wyjściowego zagadnienia w przedziale $[t_0, t_0 + h]$ jest punktem stałym T i odwrotnie. Sprowadziwszy problem do istnienia punktu stałego, oblicza $d(Tx, Ty) = \|Tx - Ty\|$ w nadziei, że uda mu się zastosować zasadę Banacha. Wychodzi mu

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \max_{t \in [t_0, t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} f(x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(y(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &= \max_{t \in [t_0, t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} [f(x(s)) - f(y(s))]\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant L \max_{t \in [t_0, t_0+h]} \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant Lh\|x - y\|. \end{aligned} \tag{5}$$

Wnioskuje zatem, że na przykład dla $h = \frac{3}{4L}$, nierówność (1) zachodzi (z $q = \frac{3}{4}$) i notuje, że na odpowiednio krótkich przedziałach $[t_0, t_0 + h]$ rozwiązanie postawionego zagadnienia istnieje i jest tylko jedno.

Potem jednak przychodzi refleksja: ależ przecież wartość $u' = x(t_0 + h)$ można potraktować jako warunek początkowy zagadnienia analogicznego, z t_0 zamienionym na $t_0 + h$, które można rozwiązać tą samą metodą. To jak było dobrane u nie miało żadnego znaczenia; ważna była tylko zależność między h i L. A zatem pierwotne, krótkie rozwiązanie można rozszerzyć do przedziału dwa razy dłuższego, a potem tą samą metodą do przedziału dłuższego trzykrotnie itd., zob. rysunek 2 (trzeba oczywiście sprawdzić, że takie sklejanie rozwiązań daje rozwiązania, ale to szczegół techniczny). To znaczy jednak, że można znaleźć rozwiązanie na dowolnie długim, danym z góry, przedziale.

I wydaje się, że problem został rozwiązany. Lecz, jak śpiewał Jan Kaczmarek, „brak w tym wszystkim elegancji”, a przecież zdaniem Bernarda Turowicza „matematyka jest częścią kultury”, więc powinna się elegancją cechować. Czy tego nie można było rozwiązać zgrabniej, bez sklejania i sztukowania? Można było.



Rys. 2. Przedłużanie, sklejanie rozwiązań.

1.4. Norma Bieleckiego

Należało rozważyć normę daną wzorem (zob. [5], zob. też [11])

$$\|x\|_\lambda = \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}|x(t)|;$$

$\lambda \geqslant 0$ jest tu parametrem, który dobierzemy później. Zauważmy najpierw jednak, że dla $\lambda = 0$ jest to „normalna” norma supremum i że zachodzą nierówności

$$\mathrm{e}^{-\lambda h}\|x\|_0 \leqslant \|x\|_\lambda \leqslant \|x\|_0.$$

To oznacza, że norma $\|\cdot\|_\lambda$ jest równoważna wyjściowej. W szczególności ciągi Cauchy'ego w jednej z nich są też ciągami Cauchy'ego w drugiej; podobnie granice obliczone w każdej z nich są takie same. A to implikuje, że przestrzeń $C[t_0, t_0+h]$ ze zmodyfikowaną normą jest nadal przestrzenią Banacha.

Zobaczmy jak w tej nowej normie wygląda rachunek (5). Mamy teraz

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\|_\lambda &= \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} \left|\int_{t_0}^{t} [f(x(s)) - f(y(s))]\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant L \max_{t\in[t_0,t_0+h]} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}[\mathrm{e}^{-\lambda(s-t_0)}|x(s)-y(s)|]\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \max_{t\in[t_0,t_0+h]} L\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s\|x-y\|_\lambda < \frac{L}{\lambda}\|x-y\|_\lambda.\end{aligned}$$

Szkoda, że parametru λ nie nazwaliśmy γ, bo mielibyśmy całą gamę gamm.

Możemy teraz skorzystać z tego, że mamy do dyspozycji całą gamę norm (indeksowanych λ): dobierając $\lambda > L$ przekonujemy się, że T spełnia warunek (1) z $q = \frac{L}{\lambda}$. Mamy więc jeden jedyny punkt stały odwzorowania T w każdej przestrzeni $C[t_0, t_0+h]$ niezależnie od tego jak duże jest h i problem jest rozwiązany bez klejenia i indukcji (bez której formalny dowód by się nie obył).

Piękne prawda? Trzeba było tylko umieć patrzeć.

Ja celowo, nieco wbrew panującej konwencji, w sformułowaniu zasady Banacha nie napisałem „istnieje q”, lecz „można dobrać q”, bo doświadczenie uczy, że dobranie q jest czasem niebagatelną sztuką. Podobną sztuką jest, jak widać, dobranie normy. To po prostu jest tak, że nie do każdego problemu „normalna” norma jest odpowiednia: trzeba do niego (i do przestrzeni) dobrać inną. Podobnie rudowłosa piękność, w zależności od tego, jaki ma cel, czasem nakłada sukienkę limonkową, czasem morską, czasem seledynową, a czasem turkusową. Stwierdzenie, że wkręty wkręca się śrubokrętem to banał: chodzi o to, by wiedzieć jaką ten śrubokręt ma mieć końcówkę.

1.5. To więcej niż sztuczka

Rozdział ten wypada zakończyć kilkoma uwagami. Po pierwsze, pomysł przedstawiony wyżej to znacznie więcej niż sztuczka i można go stosować do zagadnień o wiele bardziej skomplikowanych: dowodzi tego obszerna bibliografia uczniów i współpracowników Profesora Bieleckiego oraz adoratorów jego pomysłu z zupełnie innych ośrodków niż lubelski (zob. np. [10]; jak tego dowodzi kwerenda w MathSciNet, norma ta jest dość często używana w analizie równań różniczkowych i matematycznym modelowaniu zjawisk naturalnych). Z drugiej strony, trochę podobnie jak w przypadku nazwiska Banacha przypisywanemu twierdzeniu o punkcie stałym, sam Profesor, choć zainicjował teorię punktów stałych w Lublinie, nie uważał wynalazku normy za osiągnięcie epokowe. Znacznie bardziej cenił swoje inne wyniki; na świecie zresztą też bardziej jest znany z redukcji aksjomatów geometrii euklidesowej podanych przez Dawida Hilberta [3, 4].

Niezależnie od tego, że w.w. redukcja była matematycznym dziełem nieporównywalnie bardziej wyrafinowanym niż prosta w swej istocie modyfikacja normy, tej ostatniej nie można odmówić klasycznej elegancji. Dziś, choć używam norm typu Bieleckiego jako naturalnego, niemal oczywistego narzędzia, wciąż mam w pamięci olśnienie, którego doświadczyłem widząc chyba pierwszy tak jaskrawy przykład myślenia globalnego, całościowego, patrzenia „z góry". Nawet przytłumione latami obcowania z tym pomysłem wrażenie estetyczne pozostaje to samo. A o nim właśnie jest ten esej.

Czytelnik może zechcieć dla ćwiczenia pokazać, używając poznanych tu metod, że dla każdych funkcji $y, z \in C[0,1]$ istnieje dokładnie jedna funkcja $x \in C[0,1]$ spełniająca równość

$$x(t) - \int_0^t x(t-s)z(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \qquad t \in [0,1].$$

2. Syn

Ukończywszy studia (promotorem mojej pracy magisterskiej był wspomniany prof. Lasota), rozpocząłem pracę na Politechnice Lubelskiej, gdzie moim przełożonym, a później promotorem pracy doktorskiej został Profesor Kisyński. Na początku chyba nie miałem świadomości, że jest on uczniem prof. Bieleckiego, choć o tym, że znalazłem się w rękach wybitnego matematyka wiedziałem od początku („wiedziałem" na swoją miarę). Profesor Kisyński to jeden z nielicznych w Polsce erudytów matematycznych, który pochwalić się może poważnymi osiągnięciami w co najmniej kilku odległych na pozór działach matematyki; był cenionym, dogłębnym recenzentem grubo ponad setki doktoratów, habilitacji i wniosków profesorskich, a jego zdanie cenili sobie najlepsi z najlepszych. Para się matematyką do dziś, mimo lat 88.

Przez dekady obcowania z dorobkiem Profesora zdążyłem się zachwycić kilkoma jego wynikami wyjątkowej urody. Być może nie najbardziej zaawansowanymi z jego artykułów, lecz właśnie wyróżniającymi się świeżością spojrzenia, kunsztem doboru narzędzi i kolorów. Polecam chociażby probabilistyczną formułę na rozwiązania abstrakcyjnego równania telegrafu [16] i jej superelegancki dowód wymagający konstrukcji pewnego procesu o przyrostach niezależnych w sprytnie zdefiniowanej niekomutatywnej grupie, oraz powalającą na kolana algebraiczną postać twierdzenia Hille'a–Yosidy (o którym nieco powiemy niżej) [17, 18]. Na początku zatrudnienia na PL otrzymałem od Profesora garść nadbitek jego prac, z których potem przez lata czerpałem inspiracje. Chciałbym opowiedzieć o jednej z nich, krótkiej, praktycznie ledwie trzystronicowej notatce, która cytowana jest we wszystkich współczesnych podręcznikach z teorii półgrup operatorów, a która wtedy na początku lat dziewięćdziesiątych zrobiła na mnie chyba największe wrażenie. Nie jest przypadkiem, że dotyczy ona zbieżności półgrup operatorów, a ja wiele lat później opublikowałem w poważnym wydawnictwie grubaśny tom poświęcony tej teorii i jej zastosowaniom „w biologii i gdzie indziej" (jak głosi podtytuł) [8].

2.1. Teoria półgrup operatorów

Nim przejdziemy do zbieżności, wypada wyjaśnić czym jest sama teoria półgrup operatorów. Mówiąc w ogromnym – ale wygodnym – skrócie, jest to sztuka przypisywania operatorom ich funkcji wykładniczych. Oto garść szczegółów.

Rys. 3. Teoria półgrup to sztuka przypisywania operatorom ich eksponent.

2.1.1. Przypadek operatora ograniczonego

Zacznijmy od przypomnienia, że operator liniowy A w przestrzeni unormowanej $\mathbb{B}$ nazywamy ograniczonym (lub ciągłym), jeśli istnieje taka stała M, że dla każdego $u \in \mathbb{B}$ zachodzi nierówność

$$\|Au\| \leqslant M\|u\|,$$

a najmniejszą taką stałą nazywamy normą A i oznaczamy $\|A\|$. Norma ta ma tę własność, że dla dowolnych operatorów ograniczonych A i B w $\mathbb{B}$ mamy

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|. \tag{6}$$

Uzbrojeni w tę wiedzę, załóżmy teraz, że $\mathbb{B}$ ma tak dobrze dobraną normę, iż staje się przestrzenią Banacha (to znaczy przestrzenią unormowaną zupełną) i spróbujmy rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{7}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = u$, w którym A jest danym operatorem ograniczonym w $\mathbb{B}$, u jest danym wektorem z $\mathbb{B}$, a $x : [0, \infty) \to \mathbb{B}$ szukaną funkcją o wartościach w $\mathbb{B}$.

Ze względu na liniowość i ograniczoność A, dla dowolnych $v, v' \in \mathbb{B}$ mamy

$$\|Av - Av'\| \leqslant \|A\| \, \|v - v'\|,$$

a to oznacza, że (7) stanowczo przypomina (3) (z $f(u) = Au$), warunek Lipchitza jest bowiem spełniony ze stałą $L = \|A\|$. Jest oczywiście kilka różnic. Po pierwsze, tam ostrożnie myśleliśmy o krótkim przedziale, na którym ma być zdefiniowane rozwiązanie, a tu od razu o całej półprostej, ale w międzyczasie przekonaliśmy się przecież, że była to ostrożność zbędna. Po drugie, tam myśleliśmy o funkcjach o wartościach w $\mathbb{R}^n$, a tu – w jakiejś abstrakcyjnej przestrzeni Banacha i w szczególności piszemy $\|\cdot\|$ zamiast $|\cdot|$. Dla naszej analizy ma to jednak znaczenie drugorzędne. Tak samo jak tam możemy rozważyć przestrzeń $\mathbb{X}$ funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0, h]$ i wartościach w $\mathbb{B}$; okaże się, że jest ona przestrzenią Banacha (bo jest nią sama $\mathbb{B}$). Jeśli przypomnimy sobie, że funkcje ciągłe o wartościach w przestrzeni Banacha można całkować w sensie Riemanna i że tak otrzymana całka ma podobne własności jak w przypadku funkcji rzeczywistych, to równanie (7) zamienimy na równoważne mu równanie całkowe, wprowadzimy operator $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ dany wzorem analogicznym do (4) i stwierdzimy, używając normy Bieleckiego, że równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie w każdym przedziale $[0, h], h > 0$.

Rozwiązanie to możemy otrzymać metodą kolejnych przybliżeń. Przyjmując na przykład, że początkowo $x \equiv u$, wyliczymy najpierw
$(Tx)(t) = u + \int_0^t Au \, \mathrm{d}s = u + tAu$, potem
$(T^2x)(t) = u + \int_0^t A(u + sAu) \, \mathrm{d}s = u + tAu + \frac{1}{2}t^2A^2u$ i ogólnie
$(T^nx)(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^kA^k}{k!}u, n \geqslant 1.$

Rozwiązanie (7) dane jest zatem wzorem $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} u$. Otrzymany tu szereg

$$\mathrm{e}^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \tag{8}$$

jest oczywiście uogólnieniem szeregu potęgowego definiującego funkcję rzeczywistą $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ (por. podrozdział 1.1), a jego zbieżność w sensie normy operatorowej (a więc mocniejszą niż tę, którą mamy tu za darmo z rozważań poprzednich) można uzyskać z oszacowania (6) (i zupełności algebry operatorów).

Czy w tym ogólnym przypadku funkcja $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ ma nadal własności, które zwykliśmy uważać za atrybuty funkcji wykładniczej? Na pewno zachowuje jedną, kluczową, zwaną w tym kontekście warunkiem półgrupowym (bo mówi on o tym, że dodawanie w półgrupie $(\mathbb{R}^+, +)$ funkcja ta zamienia na mnożenie, składanie operatorów): dla dowolnych nieujemnych s i t zachodzi równość

$$\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}. \tag{9}$$

Co za chwilę okaże się istotne, zależność tę można otrzymać bez (owszem, pouczających, ale nieprzydatnych w sytuacjach, o których będzie mowa później) rachunków na szeregach potęgowych, opierając się na udowodnionej wcześniej jedyności rozwiązań równania (7). Czym bowiem jest, dla ustalonych $s \geqslant 0$ i $u \in \mathbb{B}$, funkcja $x(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}u$? Jedynym rozwiązaniem równania (7) z warunkiem początkowym $x(0) = \mathrm{e}^{sA}u$. Ale funkcja $y(t) = \mathrm{e}^{tA}u$ również rozwiązuje to równanie (z innym warunkiem początkowym), więc rozwiązuje je również $z(t) = \mathrm{e}^{(t+s)A}u$, a mamy $z(0) = \mathrm{e}^{sA}u$. To dowodzi, że $z(t) = x(t)$, co wobec dowolności u jest równoważne (9).

Nim przejdziemy do znacznie ważniejszego przypadku, gdy A nie jest operatorem ograniczonym, złakniony konkretów Czytelnik może zechcieć sprawdzić, że jeśli za $\mathbb{B}$ przyjmiemy znaną nam już przestrzeń $C[0,1]$ funkcji ciągłych na $[0,1]$ (o wartościach rzeczywistych), ze standardową normą supremum, i mając dane rzeczywiste parametry $a > 0$ i $p \in (0,1]$ zdefiniujemy A w tej przestrzeni wzorem $[Au](\tau) = au(p\tau)$, to formuła (8) da nam

$$[\mathrm{e}^{tA}u](\tau) = \mathrm{e}^{at} E\, u(p^{N(t)}\tau), \qquad t \geqslant 0, \tau \in [0,1], x \in C[0,1];$$

$N(t)$ jest tu zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem at, a E oznacza wartość oczekiwaną.

2.1.2. Przypadek ogólny

Rozumowanie z poprzedniego podrozdziału wskazuje, że charakterystyką operatora A, która pozwala zdefiniować jego eksponentę nie jest jego ograniczoność, lecz dobre własności rozwiązań równania (7). To bardzo szczęśliwy „zbieg okoliczności", który umożliwia dużą klasę równań różniczkowych cząstkowych i cząstkowo-całkowych traktować jako równania różniczkowe zwyczajne, tyle że w przestrzeniach Banacha.

Prześledźmy to podejście na przykładzie najprostszego chyba równania różniczkowego cząstkowego, jakim jest

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = a\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau}, \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

w którym a jest stałą dodatnią, a x szukaną funkcją dwóch zmiennych: t i τ. Zupełnie elementarne rozważania pozwalają stwierdzić, że jeśli zażądamy dodatkowo, by $x(0,\tau) = u(\tau), \tau \in \mathbb{R}$, przy czym u jest daną funkcją klasy C^1, to unikatowe rozwiązanie dane będzie wzorem

$$x(t,\tau) = u(\tau + at).$$

Zmieńmy jednak punkt widzenia na to równanie: zamiast widzieć x jako ciągłą funkcję dwóch zmiennych, uważajmy raczej, że jej argumentem jest jedynie t, tyle tylko, że jej wartościami są funkcje ciągłe argumentu τ. By skupić uwagę na konkrecie (a wybór jest tu dość szeroki) rozważmy przestrzeń $\mathbb{B} = C[-\infty, \infty]$ rzeczywistych funkcji ciągłych u, zdefiniowanych na całej osi, które mają granice w plus i minus nieskończoności i wyposażmy ją w standardową metrykę supremum: $\|u\| = \sup_{\tau\in\mathbb{R}} |u(\tau)|$ (istnienie wspomnianych w definicji $\mathbb{B}$ granic powoduje, że supremum to jest skończone) dzięki czemu stanie się przestrzenią Banacha. O x myślimy więc jako o funkcji ciągłej o wartościach w $\mathbb{B}$, a równanie (10) widzimy jako przykład (7) z nieograniczonym operatorem A danym wzorem

$$Au = a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}, \tag{11}$$

na którego dziedzinę $\mathcal{D}(A)$ składają się te funkcje u, dla których pochodna $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}$ istnieje i jest elementem $\mathbb{B}$ (sprawdzenie, że jest to istotnie operator nieograniczony pozostawiam Czytelnikom).

Oczywiście takie postawienie sprawy zmienia zupełnie postać rzeczy: w zmodyfikowanym równaniu od rozwiązań oczekujemy więcej niż w wyjściowym. Na przykład $\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t}$ nie jest już po prostu punktową granicą $\frac{1}{h}\left(x(t+h,\tau) - x(t,\tau)\right)$, lecz granicą jednostajną względem τ, bo myślimy teraz o zbieżności ilorazów różnicowych w sensie normy w $\mathbb{B}$. Na szczęście jeśli $u \in \mathcal{D}(A)$, to można sprawdzić, korzystając z jednostajnej ciągłości $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}$, że definiując

$$[x(t)](\tau) = u(\tau + at) \tag{12}$$

(i naśladując tym samym rozwiązania zwykłe) rzeczywiście otrzymujemy rozwiązanie (7) z A danym wzorem (11). Co więcej, skoro rozwiązanie „zwykłego” równania było tylko jedno, to i tu nie ma innych.

Zwróćmy uwagę, że we wzorze (12) mamy de facto do czynienia z operatorem $T(t)$ danym zależnością $[T(t)u](\tau) = u(\tau + at), \tau \in \mathbb{R}$, którego działanie w przestrzeni $\mathbb{B}$ sprowadza się do przesuwania wykresu w lewo o at. Rodzina operatorów $T(t), t \geqslant 0$ ma tę własność, że przekształca $\mathcal{D}(A)$ w siebie, a jedyność rozwiązań, jak w poprzednim podrozdziale, pozwala stwierdzić, że $T(t)T(s)u = T(t+s)u$ dla $u \in \mathcal{D}(A)$ (można to też oczywiście sprawdzić bezpośrednio, ale to mniej pouczające). Operatory $T(t)$ są jednak ograniczone, co jest odbiciem ciągłej zależności rozwiązań rozważanego przez nas równania (7) od warunku początkowego, a zbiór $\mathcal{D}(A)$ jest gęsty w $\mathbb{B}$. To powoduje, że otrzymaną zależność można rozszerzyć na wszystkie $u \in \mathbb{B}$. A zatem, analogicznie jak w (9),

$$T(t)T(s) = T(t+s), \qquad s,t \geqslant 0. \tag{13}$$

Rodzina operatorów ograniczonych $T(t), t \geqslant 0$ zdaje się więc być eksponentą jakiegoś operatora, a naturalnym kandydatem jest oczywiście operator pierwszej pochodnej. Aż korci, by napisać:

Wiele lat temu, wspomniany tu prof. Lasota napisał właśnie ten wzór na tablicy jako wstęp do tego czego chciał mnie nauczyć. Nic z tego wtedy nie zrozumiałem, ale za to zapamiętałem.

$$[\mathrm{e}^{t\,a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}u](\tau) = T(t)u(\tau) = u(\tau + at), \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

co znaczy słowami tyle, że eksponentą operatora pochodnej jest rodzina operatorów translacji.

O tym, że eksponenta ta pochodzi od operatora pierwszej pochodnej można też się przekonać inaczej. Jak bowiem otrzymać ograniczony operator A z funkcji wykładniczej danej wzorem (8)? Obliczając jej pochodną w punkcie $t = 0$. W interesującym nas przypadku raczej istnienia tej ostatniej nie ma co oczekiwać dla każdego $u \in \mathbb{B}$, ale możemy pomyśleć o operatorze G, zwanym zwykle generatorem, danym wzorem

$$Gu = \lim_{t\to 0+} t^{-1}(T(t)u - u) \tag{15}$$

dla tych i tylko dla tych u, dla których granica po prawej stronie istnieje. Niezbyt skomplikowana analiza dowodzi, że operator G jest tożsamy z rozważanym wyżej $A = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ (w szczególności ich dziedziny są identyczne), a to już powinno przekonać nawet największych sceptyków.

Swoją drogą wzór (14) można też wydedukować inaczej, być może naiwnie, ale za to pięknie. Zamykając oczy na fakt, że operator $a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ nie jest ograniczony, zastosujmy do niego wzór (8). Otrzymamy, przy założeniu, że wszystkie pochodne u istnieją:

$$[\mathrm{e}^{t\,a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}}u](\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} u^{(k)}(\tau),$$

a jeśli rozpoznamy po prawej stronie rozwinięcie Taylora, przekonamy się ponownie o prawdziwości (14).

Ale dość o jawnych wzorach i o tym przykładzie. Miał on nas tylko nauczyć, że można zbudować eksponentę operatora A działającego w przestrzeni Banacha $\mathbb{B}$, jeśli spełnione są następujące warunki: dla u z dziedziny A równanie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax(t), t \geqslant 0, \qquad x(0) = u \in \mathbb{B},$$

ma jedno i dokładnie jedno rozwiązanie, które w sposób ciągły zależy od u (w każdym punkcie czasu t), a do tego dziedzina ta jest gęsta w przestrzeni $\mathbb{B}$. Uważny Czytelnik zauważy, że tych i tylko tych własności abstrakcyjnej wersji równania (10) użyliśmy w powyższej analizie.

Natomiast Czytelnik, który nie lubi mieć wszystkiego podanego na tacy i sam chciałby coś od czasu do czasu obliczyć, może zechcieć sprawdzić, że operatory $T(t), t \geqslant 0$ dane w przestrzeni $C[0,1]$ wzorem

$$[T(t)u](\tau) = \frac{1+\tau \mathrm{e}^{-t}}{1+\tau} u(\tau \mathrm{e}^{-t}), \qquad x \in C[0,1], \tau \in [0,1], t \geqslant 0$$

są eksponentą pewnego operatora, to znaczy spełniają warunek (13). Nieco więcej samozaparcia wymaga sprawdzenie, że operatorem tym jest G (zdefiniowany wzorem (15)), który można opisać następująco. Na jego dziedzinę składają się funkcje $u \in C[0,1]$ o tej własności, że pochodna odwzorowania $\tau \mapsto (1+\tau)u(\tau)$ istnieje dla wszystkich $\tau \in (0,1]$ oraz zachodzi warunek $\lim_{\tau \to 0+} \tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(1+\tau)u(\tau)] = 0$. Ponadto, dla takich u,

$$[Gu](0) = 0 \text{ oraz } [Gu](\tau) = \frac{-\tau}{1+\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(1+\tau)u(\tau)], \qquad \tau \in (0,1].$$

2.1.3. Twierdzenie Hille'a–Yosidy

Podrozdział ten wypada mi zacząć od dwóch wyznań. Po pierwsze, trochę, ale tylko trochę, oszukiwałem. Warunek (13) nie wystarcza, by rodzinę $T(t), t \geqslant 0$ uznać za eksponentę jakiegoś operatora. Do tego trzeba jeszcze, by dla każdego $u \in \mathbb{B}$,

$$\lim_{t \to 0} T(t)u = u \tag{16}$$

(swoją drogą, warunek ten wraz z (13) implikuje, że funkcja $t \mapsto T(t)u$ jest dla każdego u ciągła na całej półosi). Na szczęście we wszystkich opisanych wyżej przypadkach, włączając w to zadania, ten dodatkowy, naturalny, warunek jest spełniony. Nie wspominałem o nim na razie, by nie psuć logiki wywodu.

Po drugie, opisany w poprzednim podrozdziale sposób budowania eksponenty, mimo iż przemawia do intuicji, jest w istocie bezużyteczny. Bo przecież chodzi o to, byśmy sobie radzili z równaniami, których nie potrafimy rozwiązać innymi metodami, a nie z tymi, które już rozwiązywać umiemy. Co więcej, mało które równania daje się rozwiązać jawnie, a czasami chcielibyśmy wiedzieć, patrząc tylko na operator, coś o związanym z nim równaniu (a nie odwrotnie). Chcielibyśmy mianowicie wiedzieć, patrząc tylko na operator, czy równanie to ma dobre własności, wymienione pod koniec poprzedniego podrozdziału. Jawny wzór na eksponentę nie jest nam zwykle potrzebny.

Krokiem w tym kierunku jest fundamentalne twierdzenie Hille'a–Yosidy, które pozwala stwierdzić, czy z danym operatorem A związana jest eksponenta, na podstawie analizy tak zwanego równania rezolwenty dla A. W tym ostatnim mając dane $v \in \mathbb{B}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ szukamy takiego $u \in \mathcal{D}(A)$, że

$$\lambda u - Au = v. \tag{17}$$

Nim jednak twierdzenie to przedstawię muszę zacząć od tego, że połączone warunki (13) i (16) implikują istnienie takich stałych $M \geqslant 1$ i $\omega \in \mathbb{R}$, że

$$\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}, \qquad t \geqslant 0.$$

Sprytna zmiana normy (na równoważną) połączona z „przesunięciem” generatora półgrupy o wielokrotność operatora identycznościowego pozwala jednak sprowadzić każdą z półgrup z osobna do sytuacji, gdy

$$\|T(t)\| \leqslant 1, \qquad t \geqslant 0.$$

Dla takich półgrup, zwanych półgrupami kontrakcji (a jest ich wyjątkowo dużo chociażby w teorii procesów stochastycznych) twierdzenie Hille'a–Yosidy formułuje się wyjątkowo zgrabnie i prosto.

Mówi ono mianowicie, że
dla operatora A istnieje eksponenta spełniająca warunek

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leqslant 1, \qquad t \geqslant 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy jego dziedzina $\mathcal{D}(A)$ jest zbiorem gęstym w $\mathbb{B}$ oraz dla każdego $v \in \mathbb{B}$ i $\lambda > 0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie u równania rezolwenty (17)*, a do tego zachodzi nierówność $\|\lambda u\| \leqslant \|v\|$.*

Jeśli założenia twierdzenia Hille'a–Yosidy są spełnione, to operator przyporządkowujący prawej stronie równania rezolwenty jego rozwiązanie nazywamy rezolwentą (lub poprawniej: operatorem rezolwenty) i oznaczamy $(\lambda - A)^{-1}$. Tak więc rozwiązaniem równania rezolwenty jest $(\lambda - A)^{-1} v$ i dla każdego $\lambda > 0$ zachodzi nierówność

$$\|\lambda\,(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant 1.$$

Podkreślmy raz jeszcze, że twierdzenie Hille'a–Yosidy, choć podaje aproksymację eksponenty operatora A poprzez pewne funkcje operatorów rezolwenty, zwykle nie prowadzi do jawnej jej postaci, stwierdza tylko jej istnienie.

Popatrzmy na przykład w naszej ulubionej przestrzeni $C[0,1]$, który przyda nam się za chwilę. Dla każdego naturalnego n, dziedzinę operatora A_n definiuję jako zbiór tych $u \in C[0,1]$, które mają ciągłą pochodną i spełniają „warunek brzegowy"

$$nu'(1) = u(0) - u(1),$$

a sam operator zadaję wzorem $A_n u = u'$ (prim oznacza tu pochodną). Twierdzę, że każdy z tych operatorów ma swoją eksponentę (specjaliści mówią: jest generatorem półgrupy). W tym celu sprawdzam najpierw, że dla każdego $\lambda > 0$ i $v \in C[0,1]$ równanie rezolwenty ma dokładnie jedno rozwiązanie. Mamy tu do czynienia z niejednorodnym równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego stopnia $\lambda u(\tau) - u'(\tau) = v(\tau), \tau \in [0,1]$. Jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$u(\tau) = C\mathrm{e}^{\lambda\tau} - \int_0^\tau \mathrm{e}^{\lambda(\tau-\sigma)} v(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{18}$$

w której C jest dowolną stałą rzeczywistą, ale warunek brzegowy wymusza

$$C = C_n = \frac{nv(1) + (n\lambda + 1)\int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda(1-\sigma)} v(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}{(n\lambda+1)\mathrm{e}^{\lambda} - 1}; \tag{19}$$

dobór innego C sprawiłby, że u przestałoby być elementem dziedziny A_n. Tak więc rozwiązanie jest rzeczywiście tylko jedno.

Ale to jeszcze nie koniec. Musimy jeszcze pokazać, że $\|\lambda u\| \leqslant \|v\|$. W tym celu przypomnijmy, że funkcja $\tau \mapsto |u(\tau)|$, będąc ciągła, osiąga swoje maksimum w pewnym punkcie $\tau_0 \in [0,1]$; bez straty ogólności możemy założyć, że $u(\tau_0) \geqslant 0$ (w przeciwnym przypadku rozważamy $-u$). Jeśli τ_0 jest punktem wnętrza, to $u'(\tau_0) = 0$. Jeśli $\tau_0 = 1$ to z jednej strony $u'(\tau_0) \geqslant 0$, a z drugiej, ze względu na warunek brzegowy, $u'(1) \leqslant 0$, co dowodzi, że i w tym przypadku $u'(\tau_0) = 0$. W ostatnim przypadku, gdy $\tau_0 = 0$, mamy $u'(\tau_0) \leqslant 0$, tak więc zawsze $u'(\tau_0) \leqslant 0$. Stąd

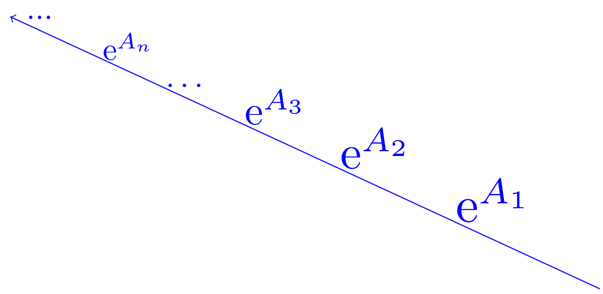
$$\|\lambda u\| = \sup_{\tau\in[0,1]} |\lambda u(\tau)| = \lambda u(\tau_0) \leqslant \lambda u(\tau_0) - u'(\tau_0) = v(\tau_0) \leqslant \sup_{\tau\in[0,1]} |v(\tau)| = \|v\|,$$

co kończy dowód. (Czytelnik zechce sam sprawdzić, że dziedzina A jest zbiorem gęstym w $C[0,1]$).

Warto tu podkreślić, że – tak jak w tym przykładzie – często (17) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, ale na podstawie jego analizy twierdzenie Hille'a–Yosidy pozwala wyciągać wnioski o równaniach na przykład cząstkowych.

2.2. Twierdzenie o zbieżności eksponent

Pierwsza, fundamentalna, monografia dotycząca teorii półgrup operatorów, pióra E. Hille'a, ukazała się w 1948 roku [12]. Ani w niej, ani w jej drugim wydaniu [13], którego współautorem był R.S. Phillips, nie znajdziemy odpowiedzi na pytanie kiedy ciąg funkcji wykładniczych jest zbieżny. Powód jest prozaiczny, bo pierwszej odpowiedzi na nie udzielili niezależnie i równocześnie H.F. Trotter i J. Neveu dopiero w roku 1958 [20, 21]; T. Kato uzupełnił lukę w rozumowaniu Trottera rok później [14].



Rys. 4. Zbieżne eksponenty.

Zadajmy to pytanie dokładniej. Mając funkcje wykładnicze $\mathrm{e}^{tA_n}, t \geqslant 0$ pochodzące od operatorów $A_n, n \geqslant 1$ zdefiniowanych w przestrzeni Banacha $\mathbb{B}$, z których każda spełnia warunek $\|\mathrm{e}^{tA_n}\| \leqslant 1$ chcielibyśmy wiedzieć, kiedy dla każdego $u \in \mathbb{B}$ i $t \geqslant 0$ istnieje granica

$$T(t)u := \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n}u$$

i jest jednostajna względem t w ograniczonych podprzedziałach $[0, \infty)$.

Zauważmy od razu, że ze względu na to, iż po prawej stronie w powyższym wzorze występują eksponenty, graniczne operatory muszą spełniać warunek (13). Ponadto, wobec faktu, że funkcje $t \mapsto \mathrm{e}^{tA_n}u$ są ciągłe, a zbieżność ma być jednostajna, graniczna funkcja $t \mapsto T(t)u$ też musi być ciągła. Innymi słowy tego typu granica funkcji wykładniczych musi sama być funkcją wykładniczą. Tak więc równoważnie możemy zapytać, kiedy istnieje taki operator A, który ma swoją funkcję wykładniczą, że

$$\mathrm{e}^{tA}u = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n}u, \tag{20}$$

jednostajnie względem t, jak wyżej.

Odpowiedź Trottera i Neveu brzmi następująco:
potrzeba do tego i wystarcza, by dla każdego $\lambda > 0$ i $v \in \mathbb{B}$ istniała granica

$$R_\lambda v := \lim_{n\to\infty} (\lambda - A_n)^{-1} v, \tag{21}$$

oraz by obraz każdego z operatorów $R_\lambda, \lambda > 0$ (który jak się okazuje, jest wspólny dla nich wszystkich) był gęsty w $\mathbb{B}$.

Konieczność wspomnianych warunków jest dość oczywista jeśli się wie, że rezolwenta operatora A_n łączy się z jego eksponentą wzorem

$$(\lambda - A_n)^{-1} v = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{tA_n} v \,\mathrm{d}t.$$

Istotnie, istnienie granicy (21) jest wnioskiem z powyższej zależności, (20) i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (które jest również prawdziwe dla całek z funkcji o wartościach wektorowych). Ze wzoru tego widać także, że R_λ musi w istocie być równe $(\lambda - A)^{-1}$, a przecież obrazem każdego operatora $(\lambda - A)^{-1}$ jest dziedzina A, która jest gęsta w $\mathbb{B}$, co uzasadnia konieczność drugiego warunku (to, że $(\lambda - A)^{-1}$ przekształca $\mathbb{B}$ w $\mathcal{D}(A)$ jest oczywiste, bo $(\lambda - A)^{-1} v$, jako rozwiązanie równania rezolwenty, jest elementem $\mathcal{D}(A)$; skoro jednak dla każdego $u \in \mathcal{D}(A)$, $v := \lambda u - Au$ może być prawą stroną w równaniu rezolwenty, obrazem $(\lambda - A)^{-1}$ jest cała dziedzina A).

Dostateczność jednak to zupełnie inna sprawa: prace Trottera i Neveu są długie i skomplikowane. Co więcej, w rozumowaniu Trottera jest luka, którą musiał uzupełnić Kato; Neveu miał trochę łatwiej, bo zajmował się nieco mniej ogólną sytuacją niż Trotter.

Minęło 10 lat nim pojawił się nowy dowód, o którym piszę w kolejnym podrozdziale. Nim jednak do niego przejdziemy popatrzmy na proste zastosowanie twierdzenia Trottera–Kato–Neveu.

Zapytajmy mianowicie, czy da się coś powiedzieć o granicy eksponent operatorów A_n zdefiniowanych pod koniec podrozdziału 2.1.3. Odpowiedź, zgodnie z omawianym twierdzeniem, kryje się w rezolwentach A_n, a z analizy przeprowadzonej w podrozdziale 2.1.3 wiemy, że funkcja $u := (\lambda - A_n)^{-1} v$ jest dana wzorem (18) z $C = C_n$ podanym we wzorze (19). Gdy $n \to \infty$, stała C_n dąży do

$$C = \frac{v(1) + \lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda(1-\sigma)} v(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}{\lambda \mathrm{e}^{\lambda}},$$

skąd wnioskujemy, że istnieje granica $(\lambda - A_n)^{-1} v$ i jest równa funkcji u zdefiniowanej wzorem (18) z C danym jak wyżej. To dowodzi pierwszej części założeń twierdzenia Trottera–Kato–Neveu.

By dowieść drugiej, zdefiniujmy operator wzorem $Au = u'$ na dziedzinie złożonej z $u \in C[0,1]$, które mają ciągłe pochodne i dodatkowo spełniają warunek $u'(1) = 0$. Rachunki analogiczne do przeprowadzonych w podrozdziale 2.1.3 dowodzą, że rozwiązaniem równania rezolwenty dla tego operatora, to znaczy równania $\lambda u - Au = v$, jest funkcja u zdefiniowana wzorem (19), ze stałą C wyliczoną kilka linijek wyżej. Inaczej mówiąc mamy

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda - A_n)^{-1} v = (\lambda - A)^{-1} u.$$

W szczególności widzimy, że operatory R_λ ze wzoru (21) pokrywają się z operatorami $(\lambda - A)^{-1}$, a skoro obrazem każdego z tych ostatnich jest dziedzina A, która jest zbiorem gęstym, druga część założeń twierdzenia Trottera–Kato–Neveu jest również spełniona. Zadanie zostało rozwiązane: udowodniliśmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n} u = \mathrm{e}^{tA} u$$

dla każdego $t \geqslant 0$ i $u \in C[0,1]$, choć, co warto podkreślić raz jeszcze, wcale nie znamy postaci e^{tA_n}.

Jest to wynik czysto analityczny, warto chyba też jednak wyjaśnić, co nam się udało udowodnić w języku procesów stochastycznych. Nie wspominałem o tym wcześniej, ale eksponenty operatorów, szczególnie te złożone z kontrakcji w przestrzeniach funkcji ciągłych, opisują procesy losowe (prosty przykład widzieliśmy w podrozdziale 2.1.1). Tak jest też i tu. Operator A_n opisuje losowy ruch według następujących zasad: cząsteczka startująca w $\tau \in [0,1)$ porusza się w prawo z prędkością równą 1, aż do momentu, gdy dotrze do $\tau = 1$. Tu czeka przez wykładniczy czas z parametrem n^{-1} nim skoczy z powrotem do $\tau = 0$, skąd rusza znów w prawo i tak w koło Macieju (tudzież dookoła Wojtek). Gdy $n \to \infty$, czas oczekiwania w $\tau = 1$ staje się jednak coraz dłuższy, aż w granicy staje się nieskończony: w procesie opisywanym przez A cząsteczka dotarłszy do $\tau = 1$ pozostaje tam na zawsze. Twierdzenie graniczne, które uzyskaliśmy powyżej mówi o słabej zbieżności procesów związanych z A_n do procesu związanego z A.

2.3. Metoda Kisyńskiego

Wróćmy do pochodzącego od Profesora Kisyńskiego dowodu twierdzenia o zbieżności [15], bo to on jest głównym tematem tej części tekstu. Jak pamiętamy, dowody Trottera i Neveu są długie i skomplikowane. Przypominają wedrówkę przez dżunglę, w której trzeba z maczetą przedzierać się przez żywy gąszcz. Co prawda przewodnicy (Trotter i Neveu) są przed nami, ale upał nam doskwiera, koszula lepi się do spoconych pleców, plecak ciąży, a komary tną niemiłosiernie. W końcu docieramy do miasta Azteków, ale szczegóły wędrówki ze zmęczenia zacierają nam się w pamięci i wcale nie mamy pewności, że się nam ono nie śni. Dowód Profesora Kisyńskiego, jeśli mamy tu szukać turystycznych analogii, polega na tym, by wzbić się w powietrze helikopterem i stwierdzić jednym rzutem oka, iż ścieżka, którą dążymy rzeczywiście prowadzi do Teotihuacan.

Albo inaczej: Czytelnik zapewne spotkał się z dowodami twierdzeń z planimetrii, które sprowadzają się do ilustrującego dobrze sytuację rysunku (taki rysunek wymaga kunsztu!) i podpisu „Patrz!". Tu jest właśnie tak.

Autor mówi nam w zasadzie co następuje. Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia Trottera–Kato–Neveu dla operatorów $A_n, n \geqslant 1$ zdefiniowanych w przestrzeni Banacha $\mathbb{B}$. Rozważmy przestrzeń $c(\mathbb{B})$ zbieżnych ciągów $(u_n)_{n\geqslant 1}$ o wartościach w $\mathbb{B}$; z normą $\|(u_n)_{n\geqslant 1}\| = \sup_{n\geqslant 1}\|u_n\|$ jest to przestrzeń Banacha. Twierdzę, że operator $\mathcal{A}$ w $c(\mathbb{B})$, którego dziedziną są takie $(u_n)_{n\geqslant 1}$, że dla każdego n, $u_n \in \mathcal{D}(A_n)$ oraz $(A_n u_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$, a który zdefiniowany jest wzorem

$$\mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (A_n u_n)_{n\geqslant 1},$$

ma swoją eksponentę. Jeśli potraktować dowód tego faktu jako analogię wspomnianego wyżej rysunku, to pod nim wystarczy napisać owo „Patrz!".

Ale idźmy po kolei i najpierw pokażmy, że operatory $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}, t \geqslant 0$ istnieją. Potrzebny będzie nam do tego elementarny fakt, że jeśli $B_n, n \geqslant 1$ są takimi operatorami ograniczonymi w $\mathbb{B}$, że dla każdego $u \in \mathbb{B}$ istnieje granica $Bu := \lim_{n\to\infty} B_n u$, a $(v_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem dążącym do granicy v, to istnieje także granica $\lim_{n\to\infty} B_n v_n$ i równa jest Bv. W naszym przypadku oznacza to, że dla każdego $(v_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$ ciąg $\left((\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1}$ jest elementem $c(\mathbb{B})$.

Pomyślmy teraz o równaniu rezolwenty dla $\mathcal{A}$. Mając dany ciąg $(v_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$ i $\lambda > 0$ szukamy takiego $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, by $\lambda(u_n)_{n\geqslant 1} - \mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (v_n)_{n\geqslant 1}$. Pamiętając, że $\mathcal{A}(u_n)_{n\geqslant 1} = (A_n u_n)_{n\geqslant 1}$ i porównując współrzędne występujących tu ciągów widzimy, że jedynym możliwym rozwiązaniem jest $(u_n)_{n\geqslant 1}$ złożony z $u_n = (\lambda - A_n)^{-1} v_n, n \geqslant 1$. Czy taki ciąg jest elementem dziedziny $\mathcal{A}$? Tak: dla każdego n, wektor $(\lambda - A_n)^{-1} v_n$ jest elementem $\mathcal{D}(A_n)$ i (wobec faktu, że $\lambda(\lambda - A_n)^{-1} v_n - A_n(\lambda - A_n)^{-1} v_n = v_n$) mamy

$$\left(A_n(\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1} = \lambda\left((\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1} - (v_n)_{n\geqslant 1}.$$

Drugi z ciągów po prawej stronie należy do $c(\mathbb{B})$ z założenia, a o tym, że do $c(\mathbb{B})$ należy pierwszy, wiemy z uwagi poczynionej wyżej. To zaś dowodzi, że $\left(A_n(\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1}$ również należy do $c(\mathbb{B})$, a zatem $\left((\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1}$ należy do dziedziny $\mathcal{A}$. Otrzymaliśmy jedno jedyne rozwiązanie równania rezolwenty dla $\mathcal{A}$.

Mamy ponadto

$$\left\|\lambda\left((\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1}\right\| = \sup_{n\geqslant 1}\|\lambda(\lambda - A_n)^{-1} v_n\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\|v_n\| = \|(v_n)_{n\geqslant 1}\|,$$

co – na podstawie twierdzenia Hille'a–Yosidy – prawie dowodzi już, że $\mathcal{A}$ ma eksponentę. Prawie, bo jeszcze nie dowiedliśmy, że dziedzina $\mathcal{A}$ jest gęsta w $c(\mathbb{B})$. Jeśli jednak uświadomimy sobie, że wystarczy wykazać, iż gęsty jest zbiór ciągów postaci

$$\left((\lambda - A_n)^{-1} v_n\right)_{n\geqslant 1},$$

w której λ jest ustalone, a zmieniają się $(v_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$, to lukę tę uzupełnimy łatwo manipulując epsilonami, drugą częścią założenia twierdzenia Trottera–Kato–Neveu i faktem, że każda z dziedzin $\mathcal{D}(A_n)$ jest zbiorem gęstym. I już.

To teraz przejdźmy do „Patrz!". Otóż twierdzę, że eksponenta operatora $\mathcal{A}$ jest dana wzorem

$$\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\mathrm{e}^{tA_n} u_n\right)_{n\geqslant 1}. \tag{22}$$

Zależność ta jest zapewne bardziej oczywista dla Czytelnika niż dla mnie, spróbujmy ją jednak krótko uzasadnić. Obliczmy transformatę Laplace'a funkcji

$t \mapsto \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(u_n)_{n\geqslant 1}$, a następnie do wyniku zastosujmy operator P_n, który ciągowi $(v_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$ przyporządkowuje $v_n \in \mathbb{B}$. Wyjdzie nam $P_n\left(\lambda - \mathcal{A}\right)^{-1}(u_n)_{n\geqslant 1} = P_n\left(\left(\lambda - A_n\right)^{-1}u_n\right)_{n\geqslant 1} = \left(\lambda - A_n\right)^{-1}u_n$. Wynik ten jest jednak transformatą Laplace'a funkcji $t \mapsto \mathrm{e}^{tA_n}v_n$. Ze względu na to, że dwie funkcje ciągłe (także te o wartościach wektorowych) nie mogą się od siebie różnić jeśli jednakowe są ich transformaty Laplace'a, n-ta współrzędna $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}(u_n)_{n\geqslant 1}$ musi być równa $\mathrm{e}^{tA_n}u_n$, co kończy dowód.

Jak się ma wzór (22) do twierdzenia o zbieżności? Wiemy, że operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ przekształca ciągi zbieżne w zbieżne, a zatem $\left(\mathrm{e}^{tA_n}u_n\right)_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny dla każdego $(u_n)_{n\geqslant 1} \in c(\mathbb{B})$, a więc także dla każdego ciągu stałego (jednostajność zbieżności też można sobie wydedukować). Po prostu: „Patrz!".

Na zakończenie zadajmy sobie pytanie: „Czy to tylko piękna sztuczka?". O nie. To coś znacznie więcej. Przede wszystkim metoda ta pokazała, że twierdzenie Trottera–Kato–Neveu jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Hille'a–Yosidy, tyle tylko, że w dobrym przebraniu. Po drugie, wskazała kluczowy dla analizy obiekt, którym jest operator $\mathcal{A}$ i przy okazji rzuciła zupełnie nowe światło na założenia twierdzenia o zbieżności: pierwsza ich część pozwala znaleźć rozwiązania równania rezolwenty dla $\mathcal{A}$ (i udowodnić kluczowe oszacowanie), druga zaś – dowieść, że $\mathcal{A}$ jest gęsto określony.

Jak każda dobra metoda pozwoliła też rozwiązać zagadnienia, o których pisząc swoją pracę Profesor Kisyński nie mógł wiedzieć. Otóż w 1970 roku T.G. Kurtz zastanawiał się [19] co się stanie, jeśli druga część założeń twierdzenia Trottera–Kato–Neveu nie będzie spełniona (to znaczy obraz R_λ nie będzie gęsty) i udowodnił, że wtedy – choć nie wiadomo, czy zbieżne będą same eksponenty – zbieżne będą ich całki. Mam na myśli to, że dla każdego $u \in \mathbb{B}$ i $t > 0$ istnieć będzie granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{sA_n}u\,\mathrm{d}s.$$

Efekt ten wydawał się jednak dziwny, nie do końca wytłumaczony.

Minęło kolejnych kilkanaście lat nim W. Arendt udowodnił [1], że jeśli operator A spełnia wszystkie założenia twierdzenia Hille'a–Yosidy poza gęstością dziedziny, to – choć swojej eksponenty nie ma – związać z nim można rodzinę $U(t), t \geqslant 0$, która naśladuje całkę z takiej – nieistniejącej – eksponenty (zob. też [2]). Poprzez operator $\mathcal{A}$ ma to bezpośrednie przełożenie na twierdzenie o zbieżności. Otóż jak już tłumaczyłem wyżej, jeśli spełniona jest tylko pierwsza część założeń twierdzenia Trottera–Kato–Neveu, to dziedzina $\mathcal{A}$ nie musi być gęsta, ale rozwiązania równania rezolwenty dla $\mathcal{A}$ są jednoznacznie wyznaczone i spełniają oszacowania takie jak w twierdzeniu Hille'a–Yosidy. Twierdzenie Arendta pozwala zatem związać z $\mathcal{A}$ wspomnianą wyżej rodzinę udającą całkę z eksponenty, nazwijmy ją $\mathcal{U}(t), t \geqslant 0$. Czytelnik zapewne się domyśla, że

$$\mathcal{U}(t)(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\int_0^t \mathrm{e}^{sA_n}u_n\,\mathrm{d}s\right)_{n\geqslant 1},$$

co pięknie tłumaczy tajemniczy wynik T.G. Kurtza.

Dla mnie jednak najważniejsze zostaje wrażenie estetyczne i powracające pytanie: jak na coś takiego można wpaść!?

3. Wnuk

Zagadnienie, które chcę omówić w ostatniej części tego eseju siedziało we mnie ponad 20 lat nim znalazło zaskakująco proste rozwiązanie. Zacznijmy jednak od początku.

3.1. O niebezpieczeństwach związanych z czytaniem

Jeszcze w czasie studiów matematycznych kupiłem kiedyś w księgarni za śmieszne zupełnie pieniądze drugi tom monografii W. Fellera „Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa.” Cóż to za wspaniała książka! Ileż w niej skrzących się najróżniejszymi odcieniami diamentów intelektu! Ale trzeba uważać, bo czytanie jej nie uchodzi zupełnie bezkarnie: niektóre problemy mogą dręczyć latami.

Zachowuję tu terminologię W. Fellera, a raczej tłumacza jego monografii, zasłużonego dla polskiej probabilistyki R. Bartoszyńskiego. Zanotujmy jednak, że dziś częściej mówi się o ruchu Browna „zabitym”, przymiotnik „pochłaniający” rezerwując dla przypadku, gdy cząstka dotarłszy do τ pozostaje tam na zawsze; rozróżnienie to subtelne, ale istotne.

By nie być gołosłownym: na stronach 305-306 Feller analizuje równanie opisujące ruch Browna na prawej półosi z ekranem pochłaniającym w zerze. Mówiąc dokładniej, chodzi o ruch chaotyczny, w którym cząsteczka wędruje losowo po prawej półosi, a dotarłszy do zera znika. Równanie na gęstość $x(t,\cdot)$ prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki w czasie t w różnych miejscach prawej półosi wygląda tak:

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x(t,\tau)}{\partial \tau^2}, \qquad x(t,0)=0, \qquad t,\tau \geqslant 0, \tag{23}$$

zakładamy przy tym, że znana jest początkowa gęstość rozkładu $x(0,\tau) = u(\tau)$ (tak więc prawdopodobieństwo, że cząsteczka w czasie t znajduje się w obszarze $\mathcal{O}$ wynosi $\int_{\mathcal{O}} x(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$). Wymaganie, by $x(t,0) = 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$, zwane warunkiem brzegowym, odpowiada podanemu tu wyżej opisowi mówiącemu, że cząsteczka dotknąwszy $\tau = 0$ znika; samo równanie cząstkowe jest zaś dokładniejszym opisem natury ruchu chaotycznego w miejscach $\tau > 0$, a jego szczegółowa analiza znacznie wykracza poza ramy tego szkicu.

Rys. 5. Metoda odbicia.

Do rozwiązania równania (23) Feller używa *metody odbicia*, którą – jak pisze – wprowadził Lord Kelvin. Jej punktem wyjścia jest fakt, że znamy jawny wzór na rozwiązanie analogicznego do (23) równania

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x(t,\tau)}{\partial \tau^2}, \qquad t \geqslant 0, \tau \in \mathbb{R} \tag{24}$$

które również opisuje rozkłady ruchu Browna, tyle że odbywającego się na całej osi (proszę zwrócić uwagę, że tu $\tau \in \mathbb{R}$ a poprzednio $\tau \geqslant 0$), a więc bez „brzegu” i „czarnej dziury” w $\tau = 0$; w szczególności w (24) nie ma warunku brzegowego. Mianowicie, jeśli znana jest gęstość początkowa $x(0,\tau) = u(\tau), \tau \in \mathbb{R}$, to rozwiązaniem równania (24) jest

$$x(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2t}} u(\tau+\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \tag{25}$$

a znawcy tematu rozpoznają po prawej stronie $E\,u(\tau + w(t))$, to znaczy wartość oczekiwaną zmiennej losowej $\omega \mapsto u(\tau + w(t,\omega))$; $w(t,\omega)$ jest tu ruchem Browna w czasie t.

Wspomniana wyżej metoda, znana również jako *metoda obrazów*, polega na tym, że funkcję u z zagadnienia (23) rozszerzamy najpierw do całej osi kładąc $u(-\tau) = -u(\tau), \tau \geqslant 0$ (wybieramy zatem rozszerzenie nieparzyste). Następnie rozwiązujemy równanie (24) z warunkiem początkowym u otrzymanym jako wyżej opisane rozszerzenie. Krótki rachunek oparty na symetrii rozkładu normalnego „siedzącego” de facto we wzorze (25) przekonuje nas wtedy, że otrzymane rozwiązanie jest dla każdego t antysymetryczne jako funkcja τ, więc w szczególności spełnia warunek brzegowy $u(t, 0) = 0$. Obcinamy je przeto do $\tau \geqslant 0$ i otrzymujemy rozwiązanie równania (23). Prosto i elegancko.

Jeśli przymioty tej metody nie uderzyły jeszcze Czytelnika jak obuchem, to dodajmy od razu, że zastosować ją można także do analizy ruchu Browna odbitego, to znaczy takiego, jak sama nazwa wskazuje, w którym cząsteczka poruszająca się po prawej półosi napotykając barierę w $\tau = 0$ odbija się od niej i dalej „buszuje” po $\tau > 0$. Takie zachowanie na brzegu ma oczywiście odzwierciedlenie w warunku brzegowym, który teraz przyjmuje postać

$$\frac{\partial x(t,0)}{\partial \tau} = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Metoda obrazów pozostaje w tym przypadku taka sama, wystarczy tylko warunek początkowy u rozszerzyć do funkcji parzystej, a nie – jak poprzednio – nieparzystej. I już.

Tak „i już”, tyle tylko, że mnie od razu dręczy cała masa pytań. Po pierwsze, jak na tak genialny sposób wpaść? Po drugie, dlaczego ta metoda działa? Po trzecie, jak mając dany warunek brzegowy wymyślić rozszerzenie? Inaczej mówiąc, skąd Feller (i Kelvin) wiedział, że do ruchu Browna z ekranem pochłaniającym pasują rozszerzenia nieparzyste, a do odbitego parzyste?

Pytania te staną się jeszcze bardziej naglące, gdy będziemy chcieli naśladować Kelvina i Fellera w przypadku choćby tak zwanego warunku brzegowego Robina, który wygląda tak:

$$\frac{\partial x(t,0)}{\partial \tau} = cx(t,0), \qquad t \geqslant 0. \tag{26}$$

Stała c jest tu współczynnikiem charakteryzującym „elastyczność” brzegu: w procesie opisywanym tym warunkiem cząsteczka napotykając barierę w $\tau = 0$ „odskakuje” od niej jak w ruchu odbitym, ale im więcej razy to zrobi tym większe jest prawdopodobieństwo, że spotka ją „kara”: zostanie unicestwiona. Im mniejsze jest c, tym średnio więcej razy można się od brzegu bezkarnie odbić. Dla $c = 0$ mamy ruch odbity, dla $c = \infty$, barierę pochłaniającą (a raczej ruch Browna „zabijany”). Śpieszę też dodać, że warunek Robina jest tylko najbardziej znanym przypadkiem znacznie bardziej ogólnej postaci warunku brzegowego, który może obejmować i pochodne drugiego rzędu, i całki. Więc jak znaleźć rozszerzenie odpowiadające takiemu ogólnemu warunkowi brzegowemu? A może metoda obrazów działa tylko dla dwóch prostych warunków brzegowych opisanych wyżej?

3.2. Dlaczego matematyk czasem nie może zasnąć.

Problem ten dręczył mnie ponad 20 lat. No, nie przesadzajmy, nie codziennie i nie zawsze z tą samą intensywnością; interesowały mnie przecież także inne zagadnienia, że o „robieniu” doktoratu i habilitacji nie wspomnę; w miarę normalnie też jadłem i spałem (do czasu). Aż pewnego razu zajrzałem do artykułu, którego współautorem był Ralph Chill i znalazłem tam de facto wzór na rozszerzenie odpowiadające warunkowi Robina [9].

Tego już było dla mnie zanadto. Nie potrafiłem przestać o tym myśleć. Musiałem zrozumieć, jak takie rozszerzenia się buduje, a w pracy R. Chilla oczywiście nie było żadnej wskazówki. Po mniej więcej tygodniu matematycznych tortur w końcu ujrzałem światło, a rozwiązanie było tak proste, że aż trudno w to uwierzyć. Oszczędzę Czytelnikowi jego ogólnego, abstrakcyjnego sformułowania, a skupię się – za chwilę – na ilustrującym ją przykładzie. Napiszę tylko, że wystarczyło pamiętać o fakcie, wspomnianym wyżej w konkretnym przypadku, a przyjętym w ogólności bez komentarza, że funkcja wykładnicza operatora A ma następującą własność:

$$\text{jeśli } u \in \mathcal{D}(A) \text{ to i w każdym momencie } t \geqslant 0 \text{ mamy } \mathrm{e}^{tA}u \in \mathcal{D}(A). \qquad (27)$$

Gdy to zrozumiałem nie mogłem zasnąć prawie przez całą noc: kłąb myśli przetaczał się nieustannie przez moją głowę i na sen po prostu nie pozwolił. Dwadzieścia lat, a to było takie proste i otwierało takie perspektywy!

3.2.1. Przykład (prosty, ale trafny)

Oto obiecany przykład. Mając dane $a > 0$, rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial x(t,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial x(t,\tau)}{\partial \tau}, \qquad t \geqslant 0, \tau \leqslant 0, \qquad (28)$$

z warunkiem „brzegowym”

$$\frac{\partial x(t,0)}{\partial \tau} = a[x(t,-1) - x(t,0)], \qquad t \geqslant 0.$$

Opisuje ono proces podobny do tego z podrozdziału 2.1.3: cząsteczka znajdująca się w $\tau < 0$ porusza się w prawo z prędkością równą jeden, dotarłszy do $\tau = 0$ pozostaje w tym punkcie przez czas wykładniczy z parametrem a, a następnie skacze do $\tau = -1$, skąd znów rusza w prawo, itd.

Zgodnie z tym, co już powiedzieliśmy poprzednio, nasze zadanie sprowadza się do tego, by udowodnić, że ukryty tu operator ma eksponentę. Mówiąc dokładniej, niech $\mathbb{B} = C[-\infty, 0]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na lewej półosi, które mają granice w $-\infty$. Chcemy udowodnić, że eksponentę ma operator $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ zdefiniowany na dziedzinie złożonej z tych $u \in \mathbb{B}$, które mają pochodną u' należącą do $\mathbb{B}$ i spełniają warunek

$$u'(0) = a[u(-1) - u(0)]. \qquad (29)$$

Można to zrobić za pomocą twierdzenia Hille'a–Yosidy, ale nasz cel jest nieco inny. Ze względu na to, że mamy tu do czynienia z operatorem pierwszej pochodnej, a wiemy, że w przestrzeni $C[-\infty,\infty]$ jego eksponentą jest rodzina operatorów przesunięć, chcielibyśmy mieć zależność następującą:

$$[\mathrm{e}^{tA}u](\tau) = \widetilde{u}(\tau + t), \qquad \tau \leqslant 0, t \geqslant 0. \qquad (30)$$

„Falka”, oznaczająca rozszerzenie jest tu konieczna, bo ze względu na to, że u po lewej stronie zdefiniowane jest tylko dla $\tau \leqslant 0$, bez rozszerzenia wzór ten traciłby sens dla $t > -\tau$. No właśnie, ale jak rozciągnąć u na całą oś, by wzór ten rzeczywiście opisywał eksponentę A?

Tu z pomocą przychodzi nam (27). Bo pomyślmy, jeśli $u \in \mathcal{D}(A)$, to spełniony jest w szczególności warunek brzegowy (29). Dla dowolnego $t > 0$, również $\mathrm{e}^{tA}u$ będzie elementem $\mathcal{D}(A)$ i spełniać będzie w.w. warunek, a z drugiej strony, wobec (30), $\mathrm{e}^{tA}u$ będzie obcięciem przesuniętej o t funkcji $\widetilde{u}$ do lewej półosi. To sprawia, że musi zachodzić równość

$$\widetilde{u}'(t) = a[\widetilde{u}(t-1) - \widetilde{u}(t)], \qquad t \geqslant 0.$$

Jeśli ograniczymy się do t z przedziału $[0,1]$ to $t-1$ pozostanie ujemne, więc zamiast $\widetilde{u}(t-1)$ będziemy mogli napisać $u(t-1)$ i powyższa równość zamieni się w determinujące funkcję $v(t) := \widetilde{u}(t), t \in [0,1]$ równanie różniczkowe

$$v'(t) = a[u(t-1) - v(t)], \qquad (31)$$

w którym $[0,1] \ni t \mapsto u(t-1)$ jest funkcją znaną. Od niego już tylko krok do tożsamości

$$\widetilde{u}(t) = v(t) = \mathrm{e}^{-at}u(0) + a\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}u(s-1)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1],$$

dającej wzór na upragnione rozszerzenie dla $t \in [0,1]$. Nie trzeba chyba dodawać, że w tym momencie zapominamy o tym, iż analizowaliśmy tylko u z dziedziny $\mathcal{D}(A)$ i wzorem powyższym definiujemy rozszerzenia dla wszystkich $u \in \mathbb{B}$. Ponadto zauważamy, że dla $t \in [1,2]$, $\widetilde{u}(t-1)$ ze wzoru (31) mamy już zdefiniowane, co pozwala nam napisać równanie różniczkowe na $\widetilde{u}$ w przedziale

[1, 2], a postępując indukcyjnie zdefiniować tę funkcję na całej prawej półosi. Od tego momentu pozostaje nam już tylko robota „techniczna": trzeba udowodnić, że wzór (30) z tak dobranymi rozszerzeniami rzeczywiście definiuje eksponentę A.

Co prawda wspomniany wyżej krok indukcyjny kładzie się lekkim cieniem na prostocie wybranego tu przykładu, ale zasada wydaje się jasna: warunek brzegowy, poprzez (27), pozwala wyliczyć jawną postać potrzebnego nam rozszerzenia. Co godne uwagi, podobnie jak w tw. Hille'a–Yosidy, rachunki prowadzą przez równanie różniczkowe zwyczajne: rozwiązując je wnioskujemy jednak o równaniu cząstkowym.

3.2.2. Powrót do elastycznych ruchów Browna

By poradzić sobie z równaniem różniczkowym (23) z warunkiem brzegowym $x(t,0) = 0$ zamienionym na warunek Robina (26), postępujemy podobnie (rachunki w przypadku ogólnego warunku brzegowego są analogiczne, ale bardziej skomplikowane [6], zob. też [7], gdzie podane są inne przykłady). Ze względu na to jednak, że wzór (25), który jest w istocie wzorem na $\mathrm{e}^{t\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}}$, opisuje operatory znacznie bardziej złożone niż operatory przesunięć, warto przed zastosowaniem metody obrazów przekształcić go do postaci wygodniejszej. Otóż korzystając z tego, że funkcja $\sigma \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2t}}$ jest parzysta, możemy jego prawą stronę napisać tak

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2t}} \tfrac{1}{2} \left[u(\tau+\sigma) + u(\tau-\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma,$$

a stąd już tylko krok wiary do tożsamości

$$\mathrm{e}^{t\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}} u = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2t}} C(s) u \,\mathrm{d}s,$$

w której

$$C(s)u(\tau) = \frac{1}{2}\left[u(\tau+s) + u(\tau-s)\right], \qquad s, \tau \in \mathbb{R}.$$

Rodzina $C(s), s \in \mathbb{R}$ jest tak zwaną funkcją kosinusową odpowiadającą operatorowi $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}$. Tak, niektórym operatorom oprócz funkcji wykładniczej można przyporządkować też funkcję kosinusową (należy do nich $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}$ ale nie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$). Jeśli operatorowi A można przyporządkować taką funkcję, nazwijmy ją $C_A(t), t \in \mathbb{R}$, to $\frac{1}{2}A$ można przyporządkować również funkcję wykładniczą (ale nie odwrotnie) i ta ostatnia dana jest wzorem (uogólniającym poprzedni)

$$\mathrm{e}^{t\frac{1}{2}A} u = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2t}} C_A(s) u \,\mathrm{d}s.$$

Tak więc jeśli chcemy znaleźć w przestrzeni $C[0,\infty]$ (ciągłych funkcji na prawej półosi, które w $+\infty$ mają granice) funkcję wykładniczą operatora $\frac{1}{2}A$ dla $A = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}$ zdefiniowanego na dziedzinie złożonej z funkcji u, które mają ciągłą drugą pochodną u'' należącą do $C[0,\infty]$ i spełniają warunek brzegowy $u'(0) = cu(0)$, a chcemy to zrobić metodą obrazów Kelvina, to szukamy w istocie takiego rozszerzenia $\widetilde{u}$ do całej osi $\mathbb{R}$ funkcji $u \in C[0,\infty]$, by zachodził wzór

$$\mathrm{e}^{t\frac{1}{2}A} u(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2t}} \tfrac{1}{2} \left[\widetilde{u}(\tau+\sigma) + \widetilde{u}(\tau-\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma, \quad t, \tau \geqslant 0. \tag{32}$$

Ale przeprowadzone wyżej rozważania pozwalają to zadanie sprowadzić do prostszego: wystarczy znaleźć takie rozszerzenie $\widetilde{u}$ by wzór

$$C_A(s)u(\tau) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{u}(\tau+s) + \widetilde{u}(\tau-s)\right], \qquad s, \tau \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

definiował funkcję kosinusową związaną z A.

Ze względu na to, że funkcje kosinusowe również mają tę własność, iż przekształcają $\mathcal{D}(A)$ w siebie, przekonujemy się tak jak poprzednio, że jeśli funkcja u jest elementem $\mathcal{D}(A)$, to jej rozszerzenie $\widetilde{u}$ musi być tak dobrane, by dla każdego $s \in \mathbb{R}$ zachodziła równość

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\widetilde{u}(\tau+s)+\widetilde{u}(\tau-s)]_{|\tau=0} = c[\widetilde{u}(s)+\widetilde{u}(-s)].$$

Jeśli zaś zdefiniujemy funkcję v na prawej półosi wzorem $v(t)=\widetilde{u}(-t), t \geqslant 0$, to otrzymamy stąd następujące równanie różniczkowe zwyczajne na v:

$$v'(t) - cv(t) = u'(t) + cu(t), \qquad t \geqslant 0$$

z warunkiem początkowym $v(0)=u(0)$ i $v'(0)=-u'(0)$, w którym u i u' są funkcjami danymi. Używając, na przykład, transformaty Laplace'a można sprawdzić, że równanie to wyznacza v jednoznacznie: musimy mieć

$$\widetilde{u}(-t) = v(t) = u(t) - 2c\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-s)}u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant 0.$$

Tak jak poprzednio, musimy się jeszcze natrudzić, by pokazać, że wzór (33) z tak „odgadniętym” rozszerzeniem definiuje interesującą nas funkcję kosinusową; ale to już myślenia wymaga mniej.

Swoją drogą, uważny Czytelnik zapewne zauważył, że dla $c=0$ powyższy wzór prowadzi do zależności $\widetilde{u}(-t)=u(t)$, a więc rozszerzenia parzystego. Jeśli przejedziemy natomiast z c do $+\infty$ to całka $c\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-s)}u(s)\,\mathrm{d}s$ dążyć będzie do $u(0)$ i otrzymamy zależność $\widetilde{u}(-t)=-u(t)$, charakteryzującą rozszerzenie nieparzyste. Wzór ten więc w pełni zgadza się z tymi, których używał Feller: parametr c z przedziału otwartego $(0,\infty)$ opisuje stan pośredni pomiędzy dwoma końcami spektrum, to znaczy między barierą odbijającą i „czarną dziurą”, a tym samym odbicia w „krzywym zwierciadle”, ani parzyste, ani nieparzyste. Na pewno jednak nie nijakie!

Czytelnik, który dotarł do końca tego tekstu, może zechcieć w ramach zasłużonego relaksu sprawdzić przedstawioną wyżej metodą, że warunek brzegowy $u''(0)=0$, opisujący ruch Browna, który w $\tau=0$ zatrzymuje się na wieczność, prowadzi do rozszerzeń danych wzorem $u(-\tau)=2u(0)-u(\tau), \tau \geqslant 0$ i zastanowić jak to się ma do ruchu Browna, który w $\tau=0$ wpada w czarną dziurę, czyli znika.

Literatura

[1] W. Arendt. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. *Israel J. Math.*, 59:327–352, 1987.

[2] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Birkhäuser, Basel, 2001.

[3] A. Bielecki. Sur l'indépendance des axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence de Hilbert. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, 9:157–175 (1957), 1955.

[4] A. Bielecki. Réduction des axiomes de congruence de Hilbert. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, 4:321–324, 1956.

[5] A. Bielecki. Une remarque sur la méthode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov. *Bull. Polish Acad. Sci.*, 4:261–268, 1956.

[6] A. Bobrowski. Generation of cosine families via Lord Kelvin's method of images. *J. Evol. Equ.*, 10(3):663–675, 2010.

[7] A. Bobrowski. Lord Kelvin's method of images in the semigroup theory. *Semigroup Forum*, 81:435–445, 2010.

[8] A. Bobrowski. *Convergence of One-Parameter Operator Semigroups. In Models of Mathematical Biology and Elsewhere.* Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[9] R. Chill, V. Keyantuo, M. Warma. Generation of cosine families on $L^p(0,1)$ by elliptic operators with Robin boundary conditions. In *Functional Analysis and Evolution Equations. The Günter Lumer Volume*, pages 113–130. Birkhäuser, Basel, 2007. Amann, H. et al. (Eds.).

[10] A. L. Dawidowicz, A. Poskrobko. On photosynthesis process with the interaction between two types of leaves. *Math. Methods Appl. Sci.*, 41(17):7431–7449, 2018.

[11] R. E. Edwards. *Functional Analysis. Theory and Applications.* Dover Publications, 1995.
[12] E. Hille. *Functional Analysis and Semi-Groups.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31. American Mathematical Society, New York, 1948.
[13] E. Hille, R. S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957.
[14] T. Kato. Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semi-groups. *Proc. Japan Acad.*, 35:467–468, 1959.
[15] J. Kisyński. A proof of the Trotter–Kato theorem on approximation of semigroups. *Colloq. Math.*, 18:181–184, 1967.
[16] J. Kisyński. On M. Kac's probabilistic formula for the solutions of the telegraphist's equation. *Ann. Polon. Math.*, 29:259–272, 1974.
[17] J. Kisyński. The Widder spaces, representations of the convolution algebra $L^1(\mathbb{R}^+)$ and one parameter semigroups of operators. Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Preprint 588, 1-36, 1998.
[18] J. Kisyński. Around Widder's characterization of the Laplace transform of an element of $L^\infty(\mathbb{R}^+)$. *Ann. Polon. Math.*, 74:161–200, 2000. Dedicated to the memory of Bogdan Ziemian.
[19] T. G. Kurtz. A general theorem on the convergence of operator semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 148:23–32, 1970.
[20] J. Neveu. Théorie des semi-groupes de Markov. *Univ. California Publ. Statist.*, 2:319–394, 1958.
[21] H. F. Trotter. Approximation of semi-groups of operators. *Pacific J. Math.*, 8:887–919, 1958.