Czy można uniknąć gerrymanderingu?

Grzegorz KOSIOROWSKI, Kraków*

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LX Szkole Matematyki Poglądowej, *Błędy, iluzje, oszustwa*, Wola Ducka, sierpień 2019.

Redakcja

Kłopotliwe głosowania

Od kiedy ludzkość zaczęła organizować się w społeczeństwa, niezmiennie staje przed nią następujący problem: w jaki sposób podejmować decyzje, które wpływają na wszystkich członków danej grupy? W końcu każda osoba należąca do takiej grupy może mieć nieco inne cele, a także inny pomysł na ich osiąganie. Upraszczając skomplikowaną historię poszukiwania odpowiedzi na to pytanie, można powiedzieć, że na początku typowym rozwiązaniem było odwołanie się albo do argumentów nadprzyrodzonych (kapłani i szamani), albo po prostu do argumentu siły (wodzowie wojenni). Natomiast w pewnym momencie społeczeństwa szeroko rozumianego Zachodu wpadły na pomysł, by takie zagadnienia rozwiązywać za pomocą głosowań, wcielając w życie to podejście, które wydawało się najbardziej skuteczne jak największej liczbie głosujących.

To podejście wydaje się bardzo rozsądne, gdy wybieramy lepszą spośród dwóch opcji: na przykład, gdy grupa znajomych wybiera, czy wolą zamówić pizzę z szynką, czy z tuńczykiem, albo na większą skalę, gdy obywatele całego kraju w drugiej turze wyborów decydują, czy prezydentem powinien być pan X, czy pani Y. W takiej sytuacji efektem głosowania jest wybór zgodny z wolą większości. Wydawałoby się, że w innych okolicznościach głosowanie większościowe też powinno wskazać opcję najlepszą według jak największej liczby głosujących, więc można więcej tym tematem się nie zajmować. Ale oczywiście znaleźli się wredni wichrzyciele, którym musiało się coś nie podobać i, co więcej, powód swego niezadowolenia zaprezentowali publicznie. Tymi wichrzycielami okazali się matematycy.

Pierwszym z nich był Nicolas Caritat, markiz de Condorcet, XVIII-wieczny francuski filozof, ekonomista, polityk i filantrop, jeden z pierwszych orędowników idei liberalizmu gospodarczego i społecznego. Równocześnie, będąc uczniem samego d'Alemberta, osiągnął całkiem sporo w matematyce, zwłaszcza w zakresie rachunku całkowego. Dla nas najistotniejszy jest wskazany przez niego tzw. paradoks Condorceta, głoszący, że gdy dana grupa głosujących wybiera spośród co najmniej trzech propozycji, to wynik głosowania większościowego może zależeć nie tylko od preferencji głosujących, ale od precyzyjnych zasad głosowania. W bardziej matematycznym sformułowaniu:

Uwaga [Paradoks Condorceta]. Istnieje układ preferencji wyborców, dla którego relacja „większość woli propozycję A od propozycji B" nie musi być przechodnia, jeśli zbiór propozycji ma więcej niż 2 elementy.

By zilustrować paradoks Condorceta rozważmy następującą sytuację: grupa wyborców wybiera na stanowisko przywódcy między trzema kandydatami: A, B i C . Jedna trzecia z nich sądzi, że najlepszy byłby kandydat A, następnie kandydat B, a kandydat C byłby najgorszym przywódcą. Kolejna jedna trzecia głosujących woli kandydata C od kandydata A, a kandydata B uważa za słabszego od pozostałych dwóch. Wreszcie ostatnia jedna trzecia twierdzi, że kandydat B byłby najlepszy, a z dwóch pozostałych kandydatów woli kandydata C. W rezultacie, 2/3 wyborców woli kandydata C od kandydata A, również 2/3 wyborców sądzi, że kandydat A jest lepszy od kandydata B, a większością 2/3 kandydat B wygrywa z kandydatem C. Dlatego wynik wyborów może zależeć od sposobu ich zorganizowania: na przykład, jeśli najpierw odbędzie się głosowanie nad tym, czy lepszy jest kandydat A czy B, i zwycięzca zmierzy się z C, to kandydat C zostanie przywódcą, a jeśli pierwsze głosowanie rozegramy między B i C, a zwycięzca będzie rywalizował z A, to A będzie wybrany.

Z wichrzycielskim autorem Paradoksu Condorceta poradzono sobie w sposób typowy w tamtych rewolucyjnych czasach: zamknięto go w więzieniu, w którym po kilku dniach zmarł w niewyjaśnionych okolicznościach. Paradoks jednak pozostał w mocy i wszyscy badacze tej tematyki zdawali sobie sprawę z faktu,

*Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, grzegorz.kosiorowski@uek.krakow.pl

że system głosowania może być dla jego wyniku równie ważny, jak preferencje głosujących. Konieczne było dalsze rozwijanie matematycznej teorii systemów wyborczych, której celem było stworzenie obiektywnie sprawiedliwej (cokolwiek by to miało znaczyć) metody głosowania, rozumianej jako funkcja, która preferencjom wszystkich członków jakiejś grupy przypisze w deterministyczny i sensowny sposób optymalne dla całej grupy rozwiązanie danej kwestii. Oczywiście, dla właściwego postawienia problemu trzeba jeszcze zdecydować, co dokładnie oznacza słowo „sensowny”. Niemniej, można było być dobrej myśli i wierzyć, że wysiłki naukowców wskażą zadowalające rozwiązania, dopóki nie pojawił się kolejny wichrzyciel: laureat Nagrody Nobla z ekonomii z roku 1972 Kenneth Arrow. Udowodnił on twierdzenie, które w uproszczeniu stwierdza, że nie istnieje system głosowania spełniający nawet podstawowe wymagania, które niejako domyślnie zakłada się o demokratycznych wyborach.

Dokładniej, twierdzenie Arrowa w najpopularniejszym sformułowaniu mówi, że nie istnieje system głosowania, który jednocześnie nie jest dyktaturą (tj. wynik głosowania zależy od głosu więcej niż jednej osoby), szanuje jednomyślność (czyli jeśli cała grupa najbardziej ceni jakąś opcję, to ta opcja zostanie wybrana) oraz wynik jest niezależny od opcji nieistotnych, tj. dodanie dodatkowej opcji C w głosowaniu nie wpływa na to, czy w preferencjach grupowych wyżej będzie umieszczona opcja A czy B. Więcej na ten temat w artykułach [Lau] (w postaci bardziej zmatematyzowanej) lub [Kos] (w postaci bardziej popularnej).

Dlatego teoria systemów wyborczych w gruncie rzeczy sprowadza się do badania konkretnych sytuacji (inna jest recepta na sprawiedliwe wybory prezydenckie, a inna na stworzenie sprawiedliwego rankingu na zawodach w łyżwiarstwie figurowym) i poszukiwania „najmniejszego zła”: systemu, który spełnia jak najwięcej z naszych wymagań i umożliwia jak najmniej patologicznych sytuacji. Znakomitym przeglądem różnych sposobów radzenia sobie z zagadnieniami tej teorii jest książka [RSŻ].

Czym jest gerrymandering?

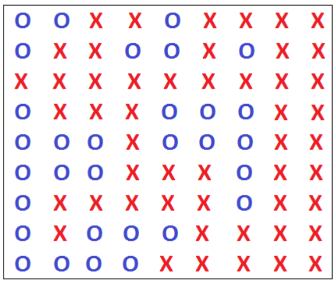
W dalszej części artykułu będziemy rozważać głosowania w tylko jednym (choć chyba budzącym największe emocje) kontekście: wyborów parlamentarnych. Co więcej, skupimy naszą uwagę na wyborach opartych na ordynacji większościowej, polegającej na podziale kraju na okręgi wyborcze, w których „zwycięzca bierze wszystko” – czyli jedyny dostępny mandat w danym okręgu otrzymuje ten, kto uzyskał w nim najwięcej głosów. Główną zaletą tego systemu jest prostota (więc teoretycznie powinien być mniej podatny na manipulacje) i, według jego zwolenników, większy kontakt parlamentarzysty z jego wyborcami, a co za tym idzie, większa łatwość w jego rozliczaniu z uczciwości i skuteczności działania. System ten jest stosowany (czasami z drobnymi odchyleniami) w większości krajów anglosaskich, ale również we Francji, Japonii, a od 2011 roku również w Polsce (w wyborach do Senatu). Dla uproszczenia rozważymy tu tylko najprostszy wariant tego systemu: każdy z wyborców wskazuje tylko jednego kandydata i kandydat, którego poprze najwięcej wyborców z danego okręgu, wygrywa dla swojej partii miejsce w parlamencie.

Kolejnym upraszczającym założeniem, jakie przyjmiemy, jest system dwupartyjny: zakładamy, że w każdym okręgu rywalizują praktycznie tylko przedstawiciele dwóch głównych partii (które będziemy nazywać partia I i partia II) i tylko te dwie partie mają istotne przedstawicielstwo w parlamencie. Wbrew pozorom, nie jest to takie duże uproszczenie. Obserwacja znana politologom jako prawo Duvergera mówi, że w dużej większości przypadków jednomandatowe okręgi wyborcze prowadzą do dominacji dwóch bloków wyborczych – czasami partia rządząca zamienia się z opozycją, czasem jedna z partii się rozpada i w jej miejsce powstaje inna, a czasem przelotnie na jedną-dwie kadencje pojawiają się „trzecie partie”, czasami decydujące o tym, kto rządzi, ale długoterminowo powstaje system dwupartyjny. Najbardziej znanym przykładem są USA, gdzie od lat dominują Partia Republikańska i Partia Demokratyczna, mimo że poglądy reprezentowane przez współczesnych przedstawicieli tych ugrupowań są zupełnie inne, niż kiedy one powstały. Jednak również w Polsce można zwrócić uwagę, że od wprowadzenia ordynacji większościowej w wyborach do Senatu dwa główne bloki wyborcze (rządzący i główny opozycyjny, jakiekolwiek ugrupowania te pozycje akurat zajmują) uzyskiwały zawsze co najmniej 90% miejsc.

Przygotowania do wyborów z kadencji na kadencję stają się coraz bardziej profesjonalne. W szczególności coraz większe znaczenie ma pozyskiwanie i analiza danych o wyborcach. Dlatego chyba nie jest kontrowersyjne ostatnie założenie naszego modelowania, które mówi, że jesteśmy w stanie w przybliżeniu oszacować przekonania polityczne wyborców w konkretnych lokalizacjach.

Głównej wady systemu większościowego w stosunku do proporcjonalnego można się domyślić po samej nazwie. Rezultaty wyborów w jednomandatowych okręgach wyborczych nie muszą być proporcjonalne do preferencji całej puli wyborców: niewielka większość głosów na pewną partię w skali całego kraju może równie dobrze oznaczać jej całkowitą dominację w parlamencie, jak i kolejną kadencję spędzoną w ławach opozycji – w zależności od tego, jak te głosy rozłożą się po regionach. Byłoby to, być może, ceną wartą zapłacenia za zalety systemu większościowego, gdyby nie to, że w skrajnej sytuacji wada ta może zostać wykorzystana do skonstruowania takich okręgów wyborczych, które pozwalają konstruującemu zapewnić pożądany przez niego wynik wyborów, niezależnie od preferencji głosujących. Dokonać tego można przez manipulowanie granicami okręgów wyborczych w taki sposób, by oddać w ręce jednej partii nieproporcjonalnie wielką liczbę mandatów. Taką manipulację nazywa się właśnie *gerrymandering*. Najczęściej polega on na użyciu jednej z dwóch sztuczek:

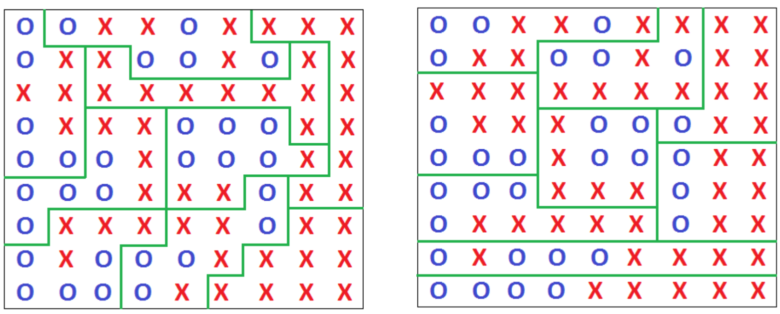
- *pakowania* jak największej liczby wyborców tej samej partii do tego samego okręgu wyborczego w celu „zmarnowania ich głosów".
- *łamania* naturalnych skupisk zwolenników jednej z partii i rozdzielaniu ich pomiędzy okręgi, w których większość ma druga z partii.



Rys. 1. W tym regionie wyborców partii I oznaczamy czerwonymi krzyżykami, a popierających partię II niebieskimi kółkami.

W rezultacie stosowania tych dwóch metod jedna z partii wygrywa z dużą przewagą w niewielu okręgach, a druga – z małą przewagą w wielu okręgach. Zobrazujemy to na rysunku 1 przedstawiającym kraj (lub jego region), który mamy podzielić na 9 równych (co do liczby głosujących) okręgów wyborczych, a wyborcy dzielą się na 50 zwolenników partii I oraz 31 popierających partię II.

Gdyby mandaty do parlamentu z tego regionu rozdzielić proporcjonalnie do poparcia obu partii, partia I powinna otrzymać w tym regionie 5-6 mandatów, a partia II 3-4 mandaty. Takie rezultaty przyniesie większość z możliwych do dokonania podziałów regionu na równie zaludnione okręgi. Zresztą, ze względu na charakterystykę wybranego systemu, zapewne bylibyśmy skłonni zaakceptować podział mandatów 7:2 lub 4:5, o ile podział na okręgi byłby naturalny i nie sugerował zamierzonych fałszerstw. Jednakże organizator wyborów o wyjątkowo złej woli wcale nie musi się bardzo gimnastykować, by zapewnić wybranej partii wynik zdecydowanie lepszy.



Rys. 2. Przykłady gerrymanderingu zapewniającego skrajnie nieproporcjonalny podział mandatów

Na rysunku 2 po lewej stronie możemy zobaczyć manipulację okręgami wyborczymi faworyzującą partię II. Polega ona na „pakowaniu" do trzech okręgów wyłącznie wyborców partii I (gdzie wygrywają jednogłośnie), i dzięki temu można pozostałych wyborców partii I tak rozmieścić w pozostałych sześciu okręgach, by niewielką większością mandaty otrzymali przedstawiciele partii II. Dzięki temu partia I, która otrzymała bezwzględną większość głosów, zajmie tylko 1/3 miejsc w parlamencie. Przeciwny przypadek mamy po prawej stronie rysunku 2: skupiska wyborców partii II na zachodzie i w centrum regionu zostały „połamane" pomiędzy różne okręgi wyborcze tak, że w żadnym okręgu partia II nie uzyska większości. W rezultacie ugrupowanie, które uzyskało 40% głosów w tym regionie, nie uzyska z niego ani jednego mandatu do parlamentu. Zauważmy, że w obydwu przypadkach preferencje głosujących były dokładanie takie same, nie było żadnych manipulacji nad urną, więc można by powiedzieć, że wybory przeprowadzono uczciwie, a ich wynik w tych sytuacjach jest skrajnie różny – tylko dzięki sprytnemu wyznaczeniu okręgów wyborczych.

Jak zobaczymy dalej, sam wynik głosowania jeszcze nie przesądza o tym, że ktoś ze złą wolą manipulował granicami. Jednak samo spojrzenie na rysunek 2 pokazuje nienaturalność zastosowanych podziałów. W podziale po lewej stronie tego rysunku kształty okręgów wyborczych, w których wygrywa partia I (szczególnie dwóch „północnych") rzucają się w oczy jako wyjątkowo dziwaczne, z kolei po prawej stronie „na południu" zwracają uwagę dwa okręgi ciągnące się od wschodnich do zachodnich granic regionu. Takich okręgów raczej nie tworzy się bez szczególnych zamiarów – chociażby ze względów logistycznych (np. łatwiejszy dojazd do lokali wyborczych), wygodniejsze są okręgi wyborcze w kształtach zbliżonych do kół.

Jednak to, co przedstawiliśmy, to przykład czysto teoretyczny. Na pewno takie patologie nie mogą zdarzać się w rzeczywistości. W końcu społeczeństwa dojrzałe do stosowania demokracji szybko wypracowałyby rozwiązania przeciw nadużyciom tego typu, prawda? W praktyce wspomniane społeczeństwa oddały kontrolę nad podziałem kraju na okręgi wyborcze swoim „najbardziej godnym zaufania przedstawicielom", czyli politykom. I rezultaty były dokładnie takie, jakich po politykach można się spodziewać.

Gerry to wybitny polityk, dyplomata i uczestnik wojny o niepodległość Stanów Zjednoczonych. Osiągnął nawet stanowisko wiceprezydenta. Prawdopodobnie nie spodziewał się, że po latach jego nazwisko będzie najbardziej kojarzone z manipulacjami wyborczymi.

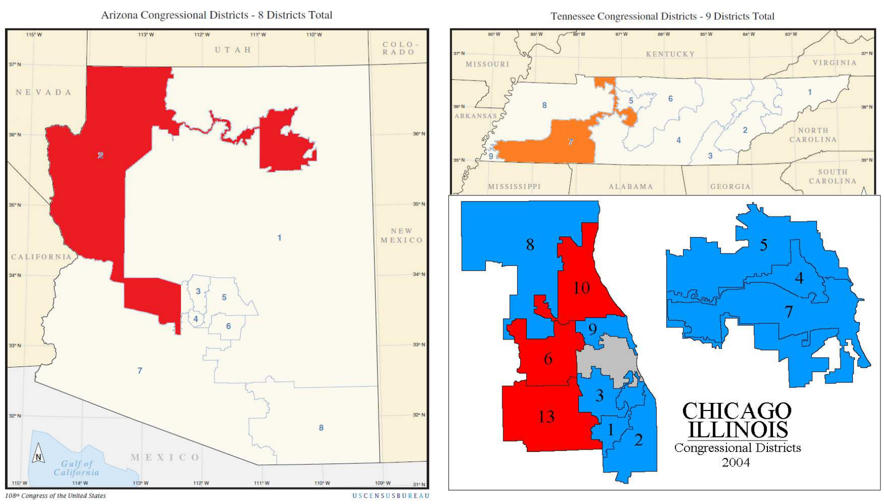
Już w 1812 roku, nawet nie pół wieku po powstaniu Stanów Zjednoczonych i stworzeniu ich systemu wyborczego właśnie w postaci ordynacji większościowej, gubernator Massachussetts z ramienia Partii Demokratyczno-Republikańskiej, Elbridge Gerry, zatwierdził podział stanu na okręgi wyborcze o dziwnych kształtach, mające zapewnić jego stronnikom zwycięstwo w następnych wyborach. W odpowiedzi lokalne czasopismo *Boston Gazette* porównało jeden z okręgów do mitycznego potwora – salamandry – tworząc od nazwiska polityka i nazwy potwora słowo *gerry-mander*, które później przekształciło się w nazwę takiego procederu, czyli tytułowy *gerrymandering*.

Jak widać na rysunku 3 – nie miał on wiele wspólnego z poczciwym płazem o tej samej nazwie spotykanym w polskich lasach.

Rys. 3. Grafika z *Boston Gazette*

Od tego czasu gerrymandering był stosowany we wszystkich krajach, które wybrały większościową ordynację wyborczą. Aktualność problemu ilustrują poniższe przykłady pochodzące z różnych kampanii wyborczych w USA z XXI wieku.

Przykłady pochodzą ze strony `rangevoting.com`, gdzie można znaleźć też wiele innych informacji na ten temat. Najłatwiej znaleźć manipulacje granicami okręgów w USA, gdyż w tym kraju najwięcej wiadomo o preferencjach wyborców w różnych lokalizacjach, a także problem gerrymanderingu jest obecnie badany najbardziej intensywnie. Nie oznacza to, że jest to jedyne państwo, w którym to zjawisko występuje.

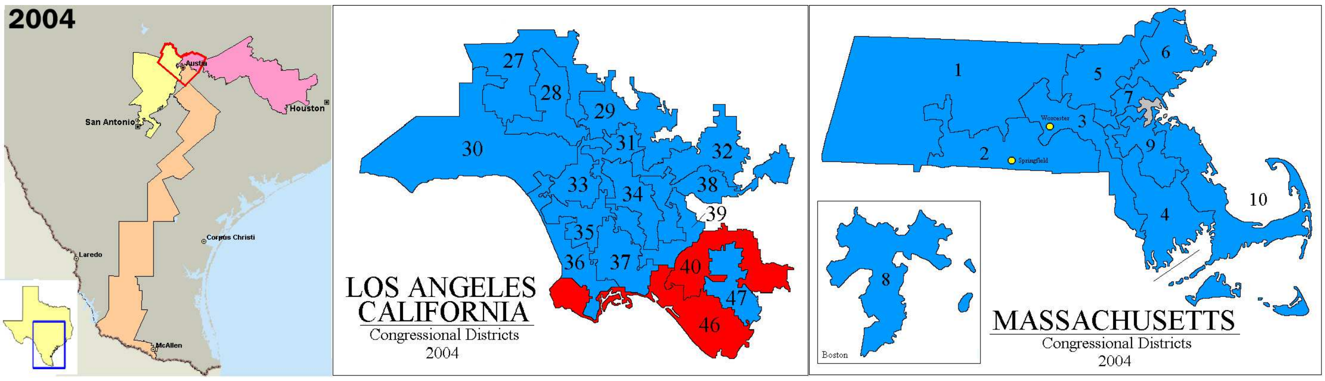


Rys. 4. Patologiczne kształty okręgów wyborczych z Arizony (po lewej), Tennessee (po prawej u góry) i Illinois (po prawej u dołu)

Trudno byłoby przekonać kogokolwiek, że kształty okręgów wyborczych z rysunku 4 są przypadkowe: zwłaszcza okręgi 2 w Arizonie, 7 w Tennessee i 4 w Chicago (do którego później wrócimy) są sztandarowymi przykładami gerrymanderingu. Zamiary manipulujących czasami łatwiej odczytać, badając rezultaty wyborów (rysunek 5). Na przykład w Teksasie specjaliści od okręgów wyborczych zamiast objąć centralnie położone miasto Austin z przedmieściami jednym okręgiem wyborczym, podzielili je pomiędzy 3 okręgi, z których jeden ciągnął się wąskim pasem aż do południowej granicy stanu. Intencja jest dość jasna – z dużym prawdopodobieństwem w Austin wygrałby kandydat demokratów, a przy przedstawionym tak podziale zwolennicy republikanów zamieszkujący rozległe przestrzenie Teksasu mogli przegłosować „miastowych”. Z kolei w Kalifornii rezultaty wyborów wskazują, że okręg 46 ciągnący się wzdłuż wybrzeża Los Angeles został stworzony po to, by „upakować” w nim wyborców republikańskich i zapewnić zwycięstwo demokratom w innych regionach. Nieco mniej jednoznaczna jest sytuacja w Massachussetts, gdzie okręgi nie wyglądają aż tak patologicznie jak w poprzednich przypadkach (choć kształty okręgów 2, 3, czy 4 powinny budzić zdziwienie), ale rezultaty wyborów wskazują, że coś może być nie tak: głosy obywateli całego stanu zwykle wskazują na niemałe poparcie dla republikanów (np. w 5 na 7 ostatnich powszechnych wyborach na gubernatora stanu zwyciężył przedstawiciel Partii Republikańskiej), a w wyborach do Kongresu od 1975 roku co najmniej 80% mandatów (a w XXI wieku wszystkie mandaty) zdobywają demokraci.

Ten konkretny układ okręgów wyborczych stał się dość głośny w USA w 2004 roku, gdy stanowy sąd stwiedził, że nie widzi w nim nic niezgodnego z prawem.

Na czerwono zaznaczone są okręgi, w któych wygrali republikanie, na niebiesko – okręgi z demokratycznymi kongresmanami.



Rys. 5. Wyraźne przykłady manipulacji w Teksasie, Kalifornii i Massachussets

W czym problem?

Dzięki wysiłkom różnych grup aktywistów problem gerrymanderingu zdobył w ostatnich latach spory rozgłos (przynajmniej w USA). Legalnością takich praktyk zajmowały się rozmaite sądy stanowe, a także Sąd Najwyższy Stanów Zjednoczonych. Zwrócono uwagę, że te manipulacje granicami okręgów są wyjątkowo szkodliwe i to na kilka sposobów:

- Skrajny brak przełożenia preferencji obywateli na wynik wyborów: jak widzieliśmy w przykładzie, jeśli zmienimy granice okręgów wyborczych, to nawet bez zmiany zdania głosujących, możemy otrzymać kompletnie inny skład parlamentu.
- Zabetonowanie sceny politycznej: zawodowi politycy uzyskują dodatkowe narzędzie zapewniania sobie przewagi nad wszelkimi ruchami oddolnymi i pozostania w parlamencie na kolejne kadencje. Przykładowo (rysunek 4) z okręgu 4 w Chicago o charakterystycznym kształcie nauszników od roku 1992 do 2019 przedstawicielem w Kongresie USA był ten sam człowiek: Luis Gutierrez. Jego przewaga była tak duża, że w niektórych przypadkach nie wystawiano nawet w tym okręgu żadnego kontrkandydata.
  W Tennessee, innym stanie o wątpliwych granicach okręgów, żaden z urzędujących kongresmanów nie przegrał wyborów na kolejną kadencję (o ile w nich kandydował) między rokiem 1980 a 2005.
- W ten sposób ulega znaczącemu osłabieniu główna przewaga ordynacji większościowej nad proporcjonalną: odpowiedzialność polityków wobec własnych wyborców. Nawet jeśli dany parlamentarzysta jest znienawidzony we własnym okręgu, to partia, która go popiera, może zapewnić mu

kontynuację mandatu, po prostu wystawiając go w okręgu, w którym ma zwycięstwo zapewnione. Taki proceder został podsumowany stwierdzeniem: *Dziś to politycy wybierają głosujących.*

- Warto również zwrócić uwagę na występujące w procesie manipulacji patologiczne sprzężenie zwrotne: wybrani dzięki gerrymanderingowi często mają wpływ na decyzje o podziale na okręgi w kolejnych kadencjach, przez co proceder ten jest systematycznie powtarzany.
- Konsekwencją jest poczucie marnowania głosów (*Skoro i tak wszystko już jest zdecydowane za moimi plecami, to po co mam iść na wybory?*) i w rezultacie zniechęcenie społeczeństwa do udziału w polityce.

Jednak pomiędzy dostrzeżeniem problemu a jego rozwiązaniem, a nawet zaproponowaniem w miarę satysfakcjonującego rozwiązania, rozciąga się olbrzymia przepaść. Co prawda, w kilku przypadkach (Wisconsin, Pensylwania, Maryland) sądy zmusiły stanowych regulatorów do zmiany ustalonych przez nich patologicznych podziałów, a w kolejnych przypadkach (m.in. Arizona, Karolina Północna) do takiej korekty granic skłoniła ich sama presja społeczno-prawna, ale wielokrotnie sądy wstrzymywały się od wydawania wyroków na temat gerrymanderingu. W szczególności w 2019 roku Sąd Najwyższy USA wydał opinię, że choć nie pochwala istoty gerrymanderingu, to sądy amerykańskie nie są wystarczająco kompetentne, by wydawać wiążące wyroki w takich sprawach.

Dlaczego prawnicy są tak ostrożni w walce z tymi manipulacjami? Oczywiście, czasami są przesłanki, by podejrzewać, że po prostu sprzyjają partii korzystającej na gerrymanderingu w danym stanie i nie są przez to bezstronni w swoich wyrokach. Jednak istnieją też obiektywne trudności. Przede wszystkim poza naprawdę ewidentnymi przykładami (takimi, jak przedstawione wcześniej), nie jest do końca jasne, jak w warunkach świata realnego, w którym granice miast, rzeki czy łańcuchy górskie mogą stanowić naturalne bariery o niezbyt regularnych kształtach, można odróżnić zamierzoną manipulację od podziału może dziwnie wyglądającego, ale wybranego na podstawie sprawiedliwych przesłanek. Również sam fakt, że wyniki wyborów odbiegają od proporcjonalnych nie jest wystarczającym dowodem gerrymanderingu: w końcu takie zdarzenia są akceptowalną konsekwencją wyboru ordynacji większościowej. Jak to obrazowo podsumował jeden z amerykańskich sędziów: *Gerrymandering jest jak pornografia. Umiem go rozpoznać, gdy go zobaczę, ale zdefiniowanie go jest poza moim zasięgiem.* Innym problemem jest fakt, że gerrymandering bywa legalny i używany „w dobrych intencjach". Istnieją tzw. *majority-minority districts*, które powstały po to, by zapewnić przedstawicielom mniejszości etnicznych przedstawicielstwo w Kongresie. Na przykład prezentowany wcześniej okręg 4 w Chicago powstał z dwóch osiedli, w których znaczącą większość stanowią osoby pochodzenia latynoskiego i cienkiego łącznika pomiędzy nimi. Tworzenie takich okręgów powszechnie jest uznawane za zgodne z prawem i pożądane, nawet jeśli analizy naukowe (np. [CEH]) wskazują, że z dużym prawdopodobieństwem takie dystrykty powodują „pakowanie" wyborców pochodzących z mniejszości i w konsekwencji bardziej im szkodzą, niż pomagają.

Na pomoc prawnikom powołana została w Bostonie grupa badawcza Metric Geometry and Gerrymandering Group złożona z matematyków współpracujących z socjologami, politologami, prawnikami i informatykami. Grupa ta uzyskała już bardzo wiele pożytecznych wyników, z których część tutaj przedstawię. Na pierwszy rzut oka wyróżniają się zwłaszcza metody dowodzące istnienia manipulacji oraz konstruujące bardziej sprawiedliwe okręgi wyborcze metodami statystycznymi. Te metody były już akceptowalne w sądach, ale ze względu na to, że wymagają dość solidnej podstawowej wiedzy o rachunku prawdopodobieństwa, budzą też w środowisku prawniczym sporą niechęć i opór w zastosowaniach. Dlatego skupię się tutaj na wskaźnikach deterministycznych, wymagających tylko podstawowych pojęć geometryczno-arytmetycznych, o wiele lepiej zrozumiałych dla laików.

Więcej na ich temat można przeczytać w [Dąb].

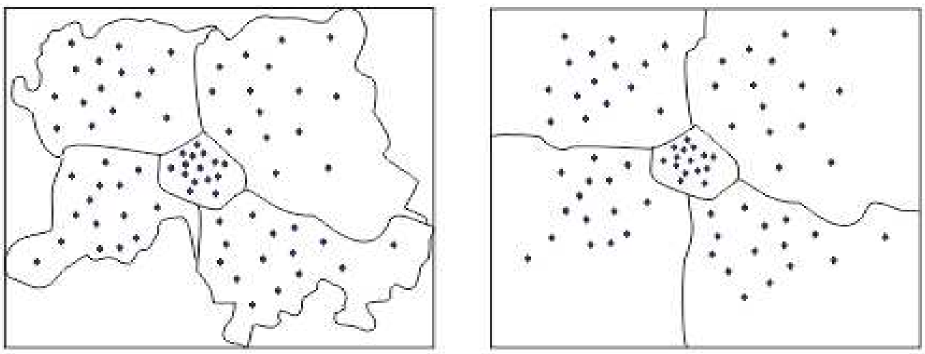
Reguły prawne i ich matematyzacja

Matematyzacja problemu powinna się opierać na regułach prawnych. Rozstrzygnięcia w dotychczasowych procesach wskazują, że aby uniknąć patologicznych efektów tworzenia okręgów wyborczych, należy kierować się trzema zasadami:

Tak naprawdę tych reguł jest nieco więcej, np. zgodnie z zasadami amerykańskiej ordynacji okręgi wyborcze powinny być spójne (w sensie topologicznym), ale trzy wymienione w artykule są najbardziej kluczowe i jednocześnie wystarczające na potrzeby głównego wyniku.

- (Równość) Okręgi wyborcze powinny składać się z mniej więcej tej samej liczby głosujących (na podstawie decyzji Sądu Najwyższego USA z lat 60. XX wieku, np. sprawy *Avery vs Midland County*, *Gray vs Sanders*).
- (Kształt) Każdy z okręgów wyborczych powinien mieć wystarczająco „normalny” kształt (sprawa *Cooper vs Harris*, 2017).
- (Sprawiedliwość) Mandaty powinny być rozdzielone w przybliżeniu proporcjonalnie do liczby głosów na każdą z partii, w szczególności liczba „zmarnowanych” głosów z obu stron powinna być podobna (sprawa *Gill vs Whitford*, 2017).

Jakkolwiek dziwnie by to nie brzmiało, dla uproszczenia i bez utraty ogólności rozważamy region w kształcie kwadratu $S = [0, 1]^2$. Istotnie, jak pokazuje rysunek 6 – podział regionu o dowolnym kształcie można sprowadzić do dzielenia na tyle samo części kwadratu, w który ten region wpiszemy.



Rys. 6. Każdy podział regionu na okręgi można przedłużyć do podziału kwadratu, w który ten region jest wpisany, na okręgi zawierające tych samych wyborców.

Preferencje głosujących i ich lokalizacja mogą być (i w praktyce są!) szacowane na podstawie spisów powszechnych oraz poprzednich wyników głosowań.

Celem jest dokonanie podziału S na k okręgów wyborczych, który byłby sprawiedliwy przy danych i zawartych w tym kwadracie zbiorach A i B oznaczających położenia głosujących na partie I i II. Formalnie definiujemy:

W praktyce k nie musi być określone dla wszystkich liczb naturalnych dodatnich, tylko dla możliwych liczb okręgów, czyli wystarczą liczby znacząco mniejsze od 1000.

Systemem podziału (districting system) nazywamy funkcję f, która każdej trójce $(A, B, k) \in (2^S)^2 \times \mathbb{N}_+$ przypisuje k-elementowy podział zbioru S, tj. rodzinę rozłącznych zbiorów $\{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ takich, że $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k = S$.

Założenie o tym, że liczba głosujących w każdym okręgu powinna być mniej więcej taka sama, możemy zapisać następująco:

Mówimy, że system podziału spełnia *kryterium δ-równości*, jeśli istnieje takie $\delta \in [0, 1)$, że dla każdej trójki (A, B, k):

$$(1-\delta)\left\lfloor \frac{|A \cup B|}{k} \right\rfloor \leqslant |(A \cup B) \cap D_i| \leqslant (1+\delta)\left\lceil \frac{|A \cup B|}{k} \right\rceil$$

dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

W ten sposób δ zadaje nam dopuszczalną różnicę między liczbą głosujących w każdym okręgu a średnią liczbą głosujących przypadającą na okręg.
W praktyce chcemy, żeby δ było jak najmniejsze, lecz na razie nie ustalamy jego wartości, by zapewnić sobie pewną elastyczność w dopasowaniu do pozostałych kryteriów.

Miarą „normalności kształtu” okręgu wyborczego będzie dla nas wskaźnik Polsby'ego-Poppera.

Wskaźnikiem Polsby'ego-Poppera (PP) dla okręgu wyborczego D_i nazywamy

$$C_i = \frac{4\pi|D_i|}{|\partial D_i|^2},$$

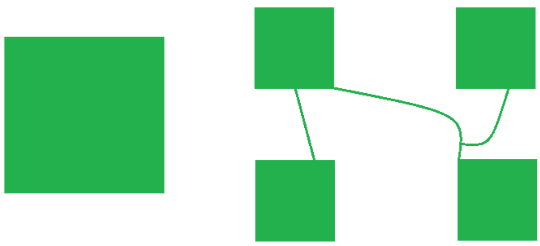
gdzie $|\partial D_i|$ oznacza obwód obszaru D_i, a $|D_i|$ – jego pole.

Oczywiście, ze względu na fraktalne własności naturalnych barier w świecie rzeczywistym sformułowanie „obwód obszaru” w odniesieniu do granic geograficznych może być nieprecyzyjne, a nawet bezsensowne, ale możemy założyć, że pomiaru obwodu dokonujemy z pewną określoną dokładnością, w określonej, dość dużej skali. Dla nas ważne jest tylko, by każdy wyborca był jednoznacznie przypisany do jednego z okręgów, a efekty mikroskopowe możemy pominąć.

Z kolei wskaźnikiem PP dla całego podziału wyborczego zbioru S dla zadanej trójki (A, B, k) nazywamy liczbę

$$C(f(A, B, k)) = \min_{i \in \{1,2,\ldots,k\}} C_i.$$

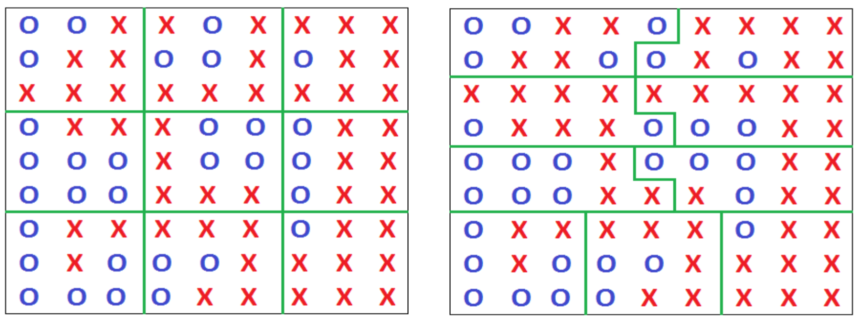
Wskaźnik może nieco zaskakiwać swoją formą, ale ma dość prostą interpretację: C_i jest to po prostu stosunek pola powierzchni okręgu wyborczego do pola powierzchni koła o takim obwodzie. Koło wydaje się idealnie „normalnym” kształtem i jednocześnie, na podstawie nierówności izoperymetrycznej, jest figurą o największym polu przy zadanym obwodzie. Dlatego zawsze zachodzi $0 < C_i \leqslant 1$ (równość mamy tylko dla okręgu wyborczego w kształcie koła) i im mniejsza wartość wzkaźnika PP, tym bardziej dany okręg różni się kształtem od koła. Żeby przekonać się, że wskaźnik PP wykrywa nietypowe kształty, przeanalizujmy kilka przykładów.



Rys. 7. Po lewej prosty kształt okręgu wyborczego, po prawej okręg „zmanipulowany” przez sklejenie czterech, geograficznie odległych od siebie części.

Na rysunku 7 widzimy po lewej kształt okręgu wyborczego, który w przybliżeniu wydaje się naturalny, po prawej kształt, który może sugerować manipulację polegającą np. na „spakowaniu” czterech grup wyborców jednej z partii do jednego okręgu. Wskaźnik PP znakomicie opisuje liczbowo tę różnicę. Łatwo obliczyć, że wskaźnik PP kształtu po lewej stronie jest równy $\frac{\pi}{4}$, a wskaźnik PP „zmanipulowanego” kształtu po prawej jest ograniczony z góry (bardzo silnie) przez $\frac{\pi}{16}$ (dokładny wynik zależy od długości łączników pomiędzy kwadratami).

Wskaźnik PP można też zastosować do wcześniej rozważanych przykładów manipulacji. Na przykład dla podziałów z rysunku 2 wynosi on $0{,}09\pi \approx 0{,}28$. Natomiast „normalniejsze” na pierwszy rzut oka podziały z rysunku 8 mają większe wartości wskaźnika PP: $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$ w przypadku podziału po lewej i $\frac{9}{49}\pi \approx 0{,}58$ dla podziału po prawej.



Rys. 8. Warto zwrócić uwagę, że podział po lewej skutkuje rozdziałem mandatów dalekim od proporcjonalnego, ale trudno go nazwać przykładem gerrymanderingu ze względu na naturalne kształty okręgów. To po prostu własność ordynacji większościowej.

Dlatego możemy zdefiniować kryterium normalności kształtu.

Mówimy, że system podziału spełnia *kryterium γ-normalności kształtu*, jeśli istnieje takie $\gamma \in (0, 1)$, że dla każdej trójki (A, B, k):

$$C(f(A, B, k)) \geqslant \gamma.$$

W praktyce chcemy, żeby γ było jak największe, lecz na razie nie ustalamy jego wartości, by zapewnić sobie pewną elastyczność w dopasowaniu do pozostałych kryteriów.

Pozostaje zmierzyć sprawiedliwość podziału. Tutaj przyjętą miarą jest *luka efektywności*, czyli względna różnica głosów zmarnowanych, padających na obie partie. W tym miejscu warto doprecyzować pojęcie głosu zmarnowanego: w potocznym rozumieniu głosami zmarnowanymi nazywa się głosy na osobę, która ostatecznie nie zdobywa mandatu. Uwzględniamy oczywiście te głosy, ale liczyć też trzeba wszystkie głosy na zwycięzcę w danym okręgu powyżej progu 50%: w końcu nie były one głosami koniecznymi do jego zwycięstwa. Gdy liczymy w ten sposób, zawsze około połowa głosów jest zmarnowana (bo „niezmarnowanymi" są tylko te głosy, które pozwoliły zwycięzcy przekroczyć 50%) ale różny jest ich podział pomiędzy kandydatów różnych partii. Miara ta może wykryć gerrymandering, gdyż jeśli podział okręgów został stworzony tak, że jedna z partii wygrywa z dużą przewagą w małej liczbie okręgów, a druga z małą przewagą w dużej liczbie okręgów, to dużo więcej głosów na tę pierwszą będzie zmarnowanych.

Wtedy możemy zdefiniować *lukę efektywności EG* tak, jak w artykule [SM].

Dla zadanej trójki (A, B, k) i podziału $f(A, B, k) = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$ definiujemy:

$$EG(D_1, D_2, \ldots, D_k, A, B) = \frac{1}{|A \cup B|} \sum_{i=1}^{k} (w_{A,i} - w_{B,i}) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

gdzie przez $w_{A,i}$ i $w_{B,i}$ oznaczamy liczbę głosów zmarnowanych, które padły odpowiednio na partię I i II w okręgu D_i.

Wartości luki efektywności w pobliżu zera wskazują na w miarę sprawiedliwy (w sensie – skutkujący równą liczbą głosów zmarnowanych z obu stron) podział wyborczy, wartości dodatnie oznaczają, że podział sprzyjał partii II, a wartości ujemne – że sprzyjał partii I. Przykładowo, dla podziału z lewej strony rysunku 2 padło 35 głosów zmarnowanych na partię I i tylko jeden na partię II (w okręgu, w którym wynik głosowania był 6:3), więc luka efektywności wyniosła $\frac{35-1}{81} \approx 0,42$. Z kolei w podziale z prawej strony tego samego rysunku możemy się doliczyć 5 zmarnowanych głosów na partię I i aż 31 na partię II, więc luka efektywności wynosi $\frac{5-31}{81} \approx -0,32$. Zgodnie z intuicją znacznie sprawiedliwiej wypadają według tej miary podziały z rysunku 8 z lukami efektywności, odpowiednio, $-0,07$ oraz $0,05$.

W swoim artykule Stephanopoulos i McGhee sugerowali, że wskaźnik ten dla żadnego uczciwego podziału nie powinien przekraczać $0,08$ bez istotnego uzasadnienia. Jednakże stałe ograniczenie na wartość luki efektywności nie sprawdza się przy dużej dysproporcji poparcia obu partii: w końcu, jeśli sobie wyobrazimy, że prawie wszyscy wyborcy w regionie głosują na partię I, to również prawie wszystkie głosy zmarnowane będą głosami na tę partię i powstająca w ten sposób duża luka efektywności nie będzie odzwierciedlać sprawiedliwości podziału lub jej braku. Dlatego kryterium sprawiedliwości będzie zawierało łagodniejszy warunek: ograniczenie powinno być funkcją różnicy w głosach pomiędzy partiami, albo powinno być stałe tylko dla pewnego zakresu tych różnic.

Mówimy, że system podziału spełnia *kryterium (α, β)-sprawiedliwości*, jeśli dla $\beta \in (0, 1)$ i $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ i dla każdych k, A, B z faktu, że $||A| - |B|| < \beta|A \cup B|$ wynika

$$|EG(D_1, \ldots, D_k, A, B)| < \frac{1}{2} - \alpha.$$

Oczywiście, dla zadanego β korzystne jest możliwie duże α. W praktyce wystarczy rozważać $\beta \leqslant \frac{1}{3}$, bo dla większych różnic w liczbie głosów współczynnik luki efektywności jako miara sprawiedliwości zaczyna zawodzić.

Twierdzenie o niemożliwości

Jedno z głównych zastrzeżeń wysuwanych wobec dowodów na stosowanie gerrymanderingu to brak jednoznacznego i pewnego algorytmu, który gwarantowałby wynik wolny od wszelkich wypaczeń. Nie można powiedzieć, że próby stworzenia rozwiązań systemowych lepszych od obecnych są bezskuteczne. Powstało wiele algorytmów stochastycznych, opartych na wybieraniu najlepszych

W najbardziej podstawowej wersji algorytm ten polega na wielokrotnym dzieleniu danego terytorium w zadanych proporcjach i wybieraniu spośród wszystkich tak przedzielających odcinków najkrótszego. To, że takie odcinki istnieją, jest prostym wnioskiem z własności Darboux.

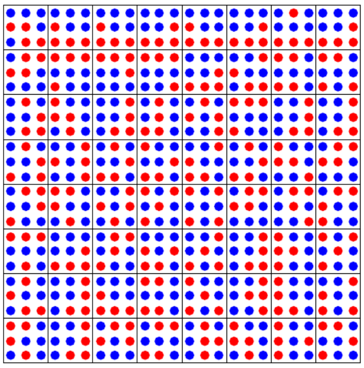
rozwiązań spośród serii losowych modyfikacji początkowego podziału na okręgi. Z algorytmów deterministycznych, najbardziej znane są modyfikacje tzw. Shortest Splitline Algorithm. Bardzo ciekawy z teoretycznego punktu widzenia jest protokół oparty na słynnym zagadnieniu „podziału tortu” ([PPY]), w którym sami przedstawiciele zainteresowanych partii dokonują podziału terytorium na okręgi wyborcze według pewnych ustalonych zasad, w konsekwencji których żadna ze stron nie uważa po zakończeniu podziału, że została pokrzywdzona. Oczywistą wadą tego ostatniego rozwiązania jest wykluczenie z decyzji „trzecich partii”, które np. w USA (a i w większości innych krajów z ordynacją większościową) nie mają większego wpływu na wyniki wyborów, ale z formalnoprawnego punktu widzenia nie powinny być stawiane na gorszej pozycji.

Niemniej, przed stworzeniem idealnego systemu podziału na okręgi warto spróbować wyznaczyć jakiś precyzyjny, choć „minimalistyczny” cel, który wszystkie „sensowne” systemy podziału powinny spełniać.

Dopuszczalny system podziału
Niech $k_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że dla danych wyborów parlamentarnych liczba okręgów wyborczych w każdym regionie dzielonym na te okręgi nie przekracza k_0. System podziału f będziemy nazywać dopuszczalnym, jeśli dla $0 < k \leqslant k_0$ spełnia kryterium δ-równości dla pewnego $\delta \in (0,1)$, kryterium γ-normalności dla pewnego $\gamma \in (0,1)$ i kryterium (α,β)-sprawiedliwości dla pewnego $\beta \in (0,1)$ i $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$.

Podsumowując: systemy dopuszczalne to są jedyne, które mają szansę spełniać podstawowe wymogi prawne i dają szansę na uniknięcie gerrymanderingu. Naturalnie, nie każdy układ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ jest pożądany. Rozstrzygnięcia prawne i prace naukowe w tym temacie sugerują, że dla $\beta = \frac{1}{3}$ system powinien być dopuszczalny z $\alpha = 0,42$ i $\gamma = \delta = 0,2$. Jeśli jednak zbiór dopuszczalnych (przy takich parametrach) systemów podziału okazałby się niepusty, moglibyśmy zaostrzać nasze wymagania, aż otrzymamy rozwiązanie idealne. Niestety, matematyczni wichrzyciele ciągle stawiają przeszkody na naszej drodze do doskonałości...

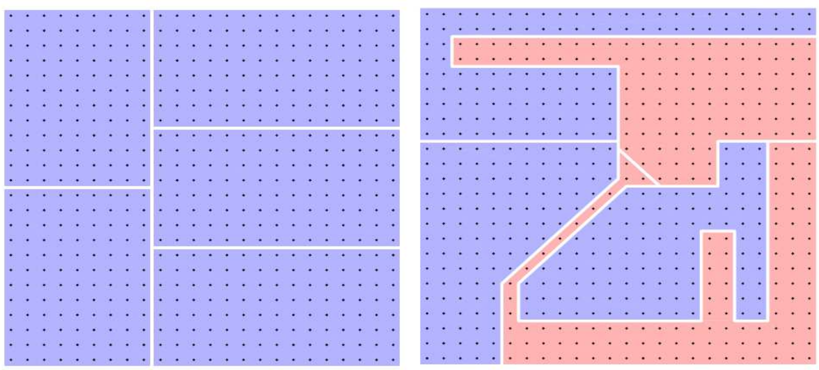
W 2017 roku, Boris Alexeev i Dustin Mixon udowodnili następujące twierdzenie ([AM]).



Rys. 9. Przykład „jednorodnej mieszaniny wyborców” dla dowolnie małych $\delta > 0$ i $\beta > \frac{1}{9}$.

Twierdzenie o niemożliwości uniknięcia gerrymanderingu
Dla każdych zadanych liczb $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,k) \in (0,\frac{1}{2}) \times (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \times \mathbb{N}$ istnieją $A, B \subset S = [0,1]^2$ takie, że dla każdego podziału wyborczego $\{D_i\}_{i=1}^k$ zbioru S co najmniej jeden z warunków: δ-równości, γ-normalności lub (α,β)-sprawiedliwości nie jest spełniony. W szczególności dopuszczalny system podziału nie istnieje.

Dowód tego twierdzenia pominiemy, gdyż jest bardzo techniczny (choć elementarny). Nadmienię tylko, że jako kontrprzykład autorzy rozważają „jednorodną mieszaninę” wyborców, o minimalnej przewadze głosów A nad B (warunek na β). W takiej sytuacji każdy okręg wyborczy o „typowym” (w sensie warunku γ-normalności) kształcie będzie gwarantował zwycięstwo kandydata partii I, co będzie skutkowało luką efektywności dowolnie bliską $\frac{1}{2}$ (patrz rysunki 9 i 10).



Rys. 10. Kompromis między normalnością kształtu a „sprawiedliwością” wyniku (dla przykładu z rysunku 9): po lewej stronie bardzo typowe kształty dają skrajnie niesprawiedliwy wynik, po prawej mamy sprawiedliwy wynik, ale potrzebujemy do tego stworzyć „dziwne” okręgi wyborcze.

Warto podkreślić, że kontrprzykład jest skonstruowany dla bardzo szczególnego rozkładu wyborców. W rzeczywistych sytuacjach warunki równości, normalności kształtu i sprawiedliwości nadal mogą być używane do testów na występowanie gerrymanderingu. W szczególności, nie każdy rozkład głosujących prowadzi do konfliktu między tymi warunkami. Najczęściej, im bardziej niejednorodny jest rozkład preferencji politycznych w populacji, tym łatwiej wyznaczyć granice okręgów wyborczych zgodne ze wspomnianymi wcześniej wytycznymi. Niestety, sama obecność „klastrów" preferencji nie rozwiązuje problemu (wystarczy rozważyć sytuacje, gdy poza kilkoma zgrupowaniami wyborców o tych samych poglądach, rozkład jest analogiczny do kontrprzykładu Alexeeva i Mixona). Nie jest – na razie – szczegółowo zbadane, czy fakt, że wyborcy o tych samych preferencjach mieszkają blisko siebie, bądź też rozkład preferencji wyborców na danym terytorium jest bardziej jednorodny, ma wpływ na pojawienie się anomalii. Jednak wiele wskazuje, że można oczekiwać, iż dadzą się wyróżnić sytuacje sprzyjające paradoksowi (np. wspomniane wyniki wyborów w Massachusetts).

Uwagi końcowe

Na podstawie twierdzenia Alexeeva-Mixona, w ramach ordynacji większościowej, nie zawsze da się uzyskać wszystkie własności wymagane prawnie.
W uproszczeniu można powiedzieć, że odrobina gerrymanderingu może być nie do uniknięcia.

Przedstawiona tu analiza nie ma na celu wykazywania wyższości proporcjonalnej ordynacji wyborczej nad zasadą okręgów jednomandatowych. Wybory proporcjonalne rodzą równie wiele (jeśli nie więcej) paradoksów i okazji do manipulacji (co najlepiej przeczytać w [RSŻ] lub, krócej, w [Cie]).
Na podstawie twierdzenia Arrowa i jego uogólnień, wiemy, że każda ordynacja wyborcza musi mieć jakieś wady. Nie oznacza to, że jeden system wyborczy nie może być w określonych okolicznościach lepszy od drugiego. I w takich sytuacjach narzędzia matematyczne mogą nam pomóc to dostrzec i udokumentować.

Literatura

[AM] B. Alexeev, D. G. Mixon. *An Impossibility Theorem for Gerrymandering*, The American Mathematical Monthly, 125:10(2018), 878-884.

[CEH] C. Cameron, D. Epstein and S. O'Halloran. *Do Majority-Minority Districts Maximize Substantive Black Representation in Congress?*, The American Political Science Review Vol. 90 (1996), No. 4 , 794-812.

[Cie] K. Ciesielski. *Paradoksy ordynacji, czyli matematyka wyborcza*, Wiedza i Życie, 8(1997).

[Dąb] A. Dąbrowski. *Salamandry buszują w JOWach*, Delta, 6 (2019).

[Kos] G. Kosiorowski. *Topologiczne problemy demokracji*, Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, 45 (2010), 1-7.

[Lau] L. Lauwers. *Topological Social Choice*, Mathematical Social Sciences 40(2000), 1–39.

[PPY] W. Pegden, A. D. Procaccia, D. Yu. *A partisan districting protocol with provably nonpartisan outcomes*, https://arxiv.org/abs/1710.08781 (2017).

[RSŻ] K. Rzążewski, W. Słomczyński, K. Życzkowski. *Każdy głos się liczy: wędrówka przez krainę wyborów*, Wydawnictwo Sejmowe, Warszawa 2014.

[SM] N. Stephanopoulos, E. McGhee. *Partisan gerrymandering and the efficiency gap*, The Unniversity of Chicago Law Review (2015), 831-900.