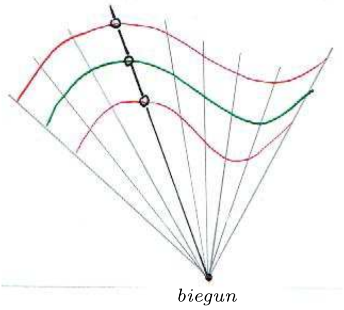
Trysekcja kąta, kwadratura koła, podwojenie sześcianu
– dlaczego Starożytni mogli, a my wiemy, że się nie da?

Marek KORDOS, Warszawa*

Wymienione w tytule trzy zadania konstrukcyjne w czasach Złotego Wieku Grecji po zwycięskich wojnach perskich uchodziły za test geometrycznego mistrzostwa.

Przedstawię trzy bardzo elementarne rozwiązania trysekcji kąta, tj. podzielenia kąta na trzy równe części, autorstwa Nikomedesa i Archimedesa (obaj −III wiek) i Pascala (XVII wiek); dwa, już mniej elementarne, rozwiązania kwadratury koła (a właściwie rektyfikacji okręgu), tj. znalezienia kwadratu o polu równym polu danego koła (równoważne znalezieniu odcinka o długości równej danemu okręgowi), autorstwa Dinostratosa (−IV wiek) i Archimedesa (−III wiek), które rozwiązują też tryskecję, a nawet n-sekcję kąta; oraz jedno (stereometryczne!) rozwiązanie podwojenia sześcianu, tj. znalezienia sześcianu o objętości dwukrotnie większej od danego, autorstwa Archytasa (−V wiek), za to z komentarzami Platona i Norwida.



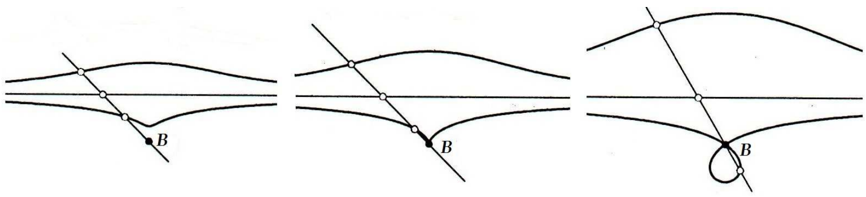
Mętną definicję konchoidografu realizuje patyk z trzema otworkami, z których środkowy leży *nomen omen* w środku odcinka wyznaczonego przez dwa pozostałe. Jeśli patykiem stale opartym o biegun wodzimy tak, aby przez środkową dziurkę widzieć punkty linii, pisaki wetknięte w pozostałe otwory nakreślą nam konchoidę tej linii. Grekom konchoida przypominała muszlę ($\kappa o \nu \chi \eta$, *konche*) perłopławu, zawierającą ową linię jak perłę.

Zaczynamy od trysekcji

Zarówno Nikomedes, Archimedes, jak i Pascal posłużyli się konchoidografem. Jest to urządzenie pozwalające nakreślić figurę złożoną z punktów, które na każdej prostej przechodzącej przez ustalony punkt zwany biegunem są odległe od punktów danej linii bliżej i dalej o tę samą odległość zwaną rozwartością.

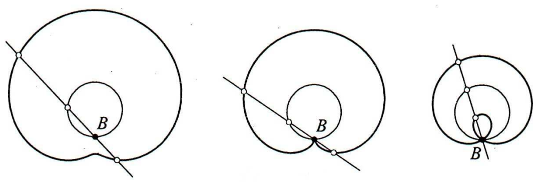
Kształt konchoidy zależy zarówno od linii, dla której ją znajdujemy, jak i położenia bieguna oraz rozwartości konchoidografu.

W przypadku konchoidy prostej, znanej jako konchoida Nikomedesa, o charakterze linii decyduje stosunek rozwartości konchoidografu do odległości bieguna od prostej.



Tu wyraźnie widać dwie części konchoidy – wewnętrzną i zewnętrzną. Obie z obu stron zbiegają asymptotycznie do prostej. Gdy stosunek rozwartości do odległości bieguna od prostej jest mniejszy od jedności, cześć wewnętrzna jest gładka, gdy jest równy 1 – ma ostrze, gdy jest większy od jedności – ma pętlę. Część zewnętrzna jest w każdym przypadku gładka i ma podobny kształt. W konstrukcji trysekcji Nikomedes posłużył się tylko zewnętrzną częścią.

Konchoid okręgu jest wiele, a wśród nich wyróżnione są te, w których biegun konchoidy leży na okręgu – mają nazwę ślimak Pascala. Parametrem decydującym o kształcie ślimaka jest stosunek rozwartości konchoidografu do promienia okręgu.



Tu nie ma podziału na zewnętrzną i wewnętrzną część ślimaka. Podobnie jak dla konchoidy prostej, gdy rozwartość jest większa – w tym przypadku od średnicy okręgu, ślimak jest gładki (i leży na zewnątrz okręgu), gdy jest równa średnicy – ślimak ma ostrze (i nazywa się wtedy kardioidą), a gdy jest mniejsza – ma pętlę (która jest wewnątrz okręgu).

Zarówno Archimedes, jak i Pascal posłużyli się ślimakiem Pascala (choć Archimedes wyprzedza Pascala na osi czasu prawie o dwa tysiące lat) – oczywiście nie jednakowo.

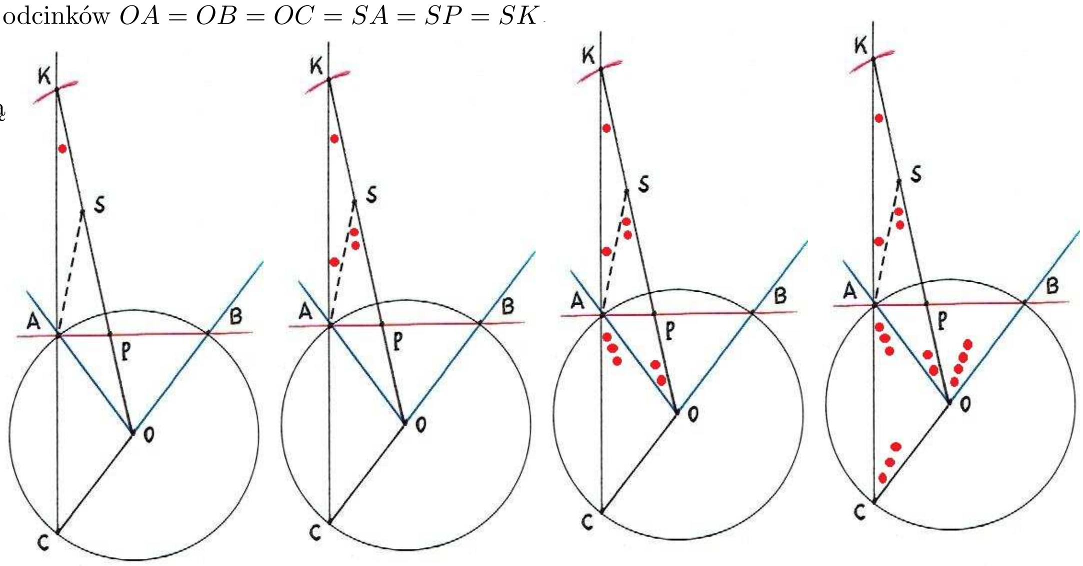
*Uniwersytet Warszawski,
kordos@mimuw.edu.pl

Trysekcja według Nikomedesa

Okrąg o środku w wierzchołku O kąta, który chcemy podzielić, przecina jego ramiona w punktach A i B; BC to średnica. Konchoida prostej AB o biegunie O i rozwartości BC przecina AC w K. Odcinek OK przecina AB w P, środek KP oznaczamy S. Zauważmy, że $AB \perp AC$ (kąt oparty na średnicy), ΔPAK jest prostokątny i wobec tego mamy aż sześć równych odcinków $OA = OB = OC = SA = SP = SK$.

Oznaczamy rozwartość $\sphericalangle AKO$ czerwoną kropką i obliczamy kolejno rozwartości kątów zewnętrznych trójkątów AKS, AKO i CKO, pamiętając że trójkąty ASK, SAP i AOC są równoramienne.

Jak widać, $\sphericalangle BOP = 2\sphericalangle AOP$, czyli $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle AOP$.



Trysekcja według Archimedesa

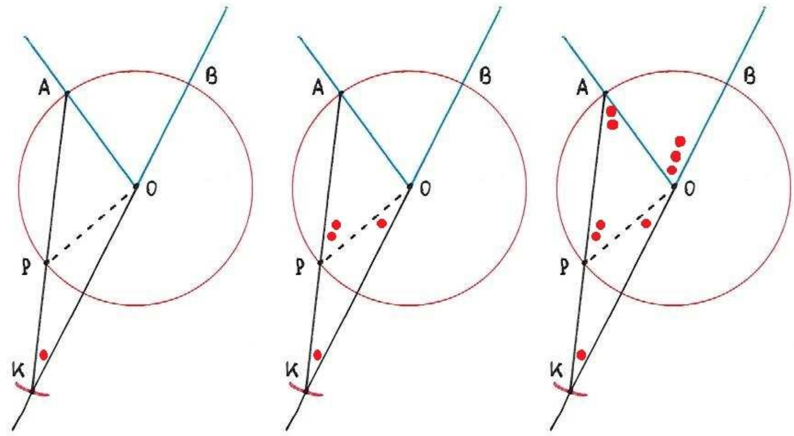
Właściwie tak samo, tylko sprytniej.

Zaczynamy jak poprzednio, ślimak ma biegun w A, rozwartość AO i przecina prostą BO w K.

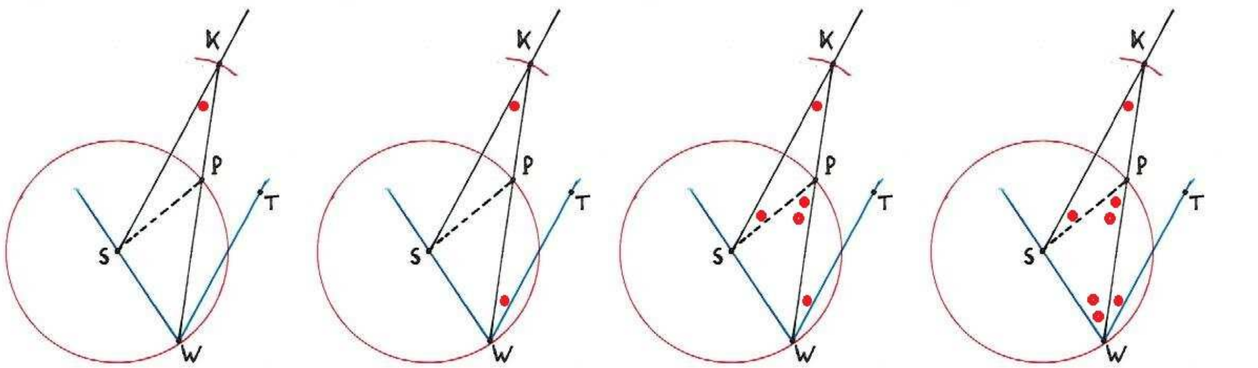
Tym razem mamy $OA = OB = OP = PK$.

Obliczamy kolejno rozwartości kątów zewnętrznych trójkątów OKP i AKO.

Jak widać, $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle AKB$.



Trysekcja według Pascala



Teraz trochę inaczej: biegun ślimaka jest w wierzchołku kąta, a jego rozwartość to promień okręgu o środku na jednym z ramion kąta. Ślimak przecina równoległą do drugiego ramienia poprowadzoną ze środka okręgu w K (wykorzystujemy tę równoległość!).

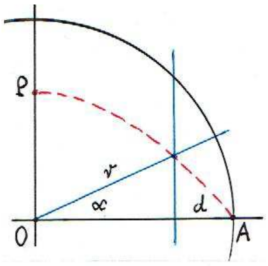
Tym razem mamy $WS = SP = PK$. Obliczamy rozwartość kąta zewnętrznego trójkąta KSP.

Jak widać, $\sphericalangle SWP = 2\sphericalangle KWT$, czyli $\sphericalangle SWT = 3\sphericalangle KWT$.

Teraz kwadratura

Ponieważ dowolny wielokąt można pociąć na skończoną liczbę mniejszych wielokątów, z których ułoży się kwadrat, więc kwadratura sprowadza się do zbudowania jakiegoś wielokąta o polu równym polu koła. Dogodny jest tu trójkąt prostokątny o przyprostokątnych r i $2\pi r$, mający pole takie jak koło o promieniu r. Druga z tych przyprostokątnych ma długość okręgu o promieniu r.

I praktycznie wszyscy szukający kwadratury szukali odcinka o długości równej długości okręgu, czyli jego rektyfikacji (rozprostowania).
Zagadnienie dalej upraszcza spostrzeżenie, że wystarczy znaleźć trójkąt prostokątny o przyprostokątnych w stosunku $1 : 2\pi$, bo żądany trójkąt uzyskuje się z niego przez jednokładność.



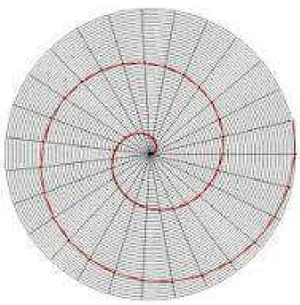
Przyrząd mechaniczny kreślący tę krzywą umiano skonstruować bez trudu, co można też polecić Czytelnikom.
Hippiasz za pomocą tej krzywej realizował podział kąta na dowolną liczbę równych części, bo,
gdy n-krotnie zmniejszymy d,
to n-krotnie zmniejszy się kąt α.

Kwadratura według Dinostratosa

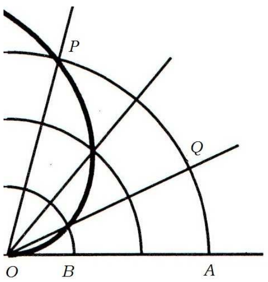
Dinostratos używał kwadratrysy Hippiasza (– V wiek), który wcale nie rozwiązywał kwadratury, lecz trysekcję kąta.

Powstaje ona jako linia zakreślona przez wspólny punkt prostej obracającej się wokół środka okręgu i prostej przesuwającej się równolegle ku środkowi tego okręgu, przy czym oba te ruchy są jednostajne i dobrane w ten sposób, że obie proste pokrywają się, gdy pierwsza z nich przyjmuje kierunek równoległy do drugiej, co wyraża prosty warunek $\dfrac{d}{\alpha} = \dfrac{a}{\frac{\pi}{2}}$, gdzie a to promień okręgu.

Stąd $d = \frac{2a}{\pi}\alpha$ i $r = \dfrac{a-d}{\cos\alpha} = \dfrac{a - \frac{2a}{\pi}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$ dla $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.
Ponieważ $\frac{\varphi}{\sin\varphi} \longrightarrow 1$ dla $\varphi \to 0$, więc $OP = \frac{2a}{\pi}$ i wystarczy teraz wziąć taki punkt Q na półprostej OA, że $OQ = 4OA$, by uzyskać trójkąt POQ mający żądaną własność, gdyż $(\frac{2a}{\pi}) : (4a) = 1 : 2\pi$.



Za pomocą tej spirali też można uzyskać podział kąta na dowolną liczbę n równych części, co na rysunku jest pokazane dla $n = 3$.



Ponieważ okrąg o środku O przez B ma promień trzykrotnie mniejszy od okręgu przez A, więc $\sphericalangle AOQ = \frac{1}{3}\sphericalangle AOP$.

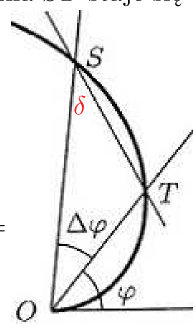
Kwadratura według Archimedesa

Archimedes też użył złożenia jednostajnego obrotu z jednostajnym przemieszczeniem.

Po obracającym się promieniu punkt oddala się od środka obrotu i tworzy spiralę Archimedesa, co można zapisać w układzie biegunowym jako $r(\varphi) = a \cdot \varphi$ dla pewnej stałej a.

Archimedes udowodnił bardzo przydatną własność swojej spirali:
w punkcie $r(\varphi)$ tangens kąta między styczną do spirali
a promieniem wodzącym jest równy φ.

Niech $S = r(\varphi + \Delta\varphi)$, $T = r(\varphi)$ i $\sphericalangle OST = \delta$. Przy $\Delta\varphi \to 0$ sieczna ST staje się styczną, a kąt δ kątem, o którym mówi dowodzona własność.

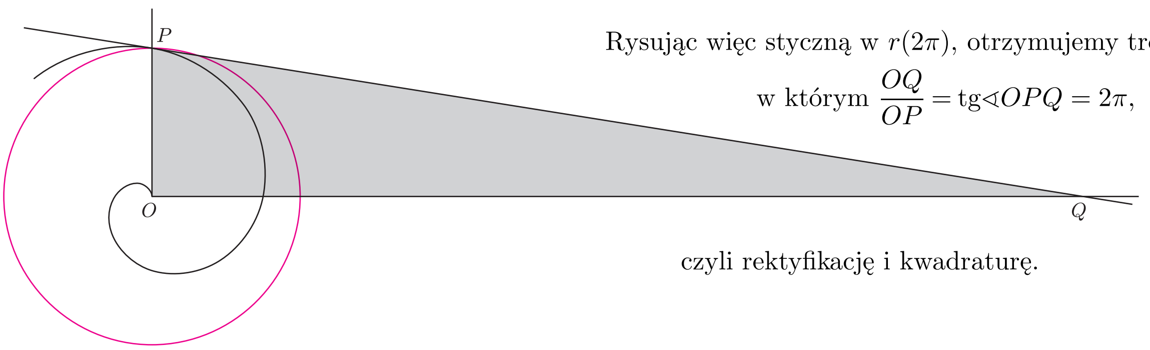


Z twierdzenia sinusów mamy $\dfrac{\sin\delta}{a\varphi} = \dfrac{\sin(\pi - (\delta + \Delta\varphi))}{a(\varphi + \Delta\varphi)}$, czyli

$(\varphi + \Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin(\delta + \Delta\varphi) = \varphi(\sin\delta\cos\Delta\varphi + \cos\delta\sin\Delta\varphi)$,
a więc $(\varphi + \Delta\varphi - \varphi\cos\Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin\Delta\varphi\cos\delta$, co daje

$$\mathrm{ctg}\delta = \frac{1}{\sin\Delta\varphi} + \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} - \frac{\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} = \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \frac{1-\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} =$$

$$= \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \frac{2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \mathrm{tg}\frac{\Delta\varphi}{2} \longrightarrow \frac{1}{\varphi}.$$



Rysując więc styczną w $r(2\pi)$, otrzymujemy trójkąt,
w którym $\dfrac{OQ}{OP} = \mathrm{tg}\sphericalangle OPQ = 2\pi$,

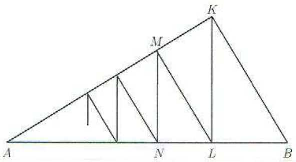
czyli rektyfikację i kwadraturę.

A teraz podwojenie sześcianu

Jeszcze w latach 40. ubiegłego wieku obecne w szkole pojęcie średnich proporcjonalnych określa się następująco: *liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ stanowią n średnich proporcjonalnych liczb a i b, jeśli zachodzi*

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}.$$

Jedna średnia proporcjonalna to średnia geometryczna.



Trójkąt prostokątny dostarcza dowolnie długi ciąg średnich proporcjonalnych, bo $\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AM} = \frac{AM}{AN} = \ldots$

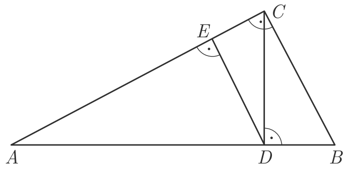
Archytas wykorzystał dwie średnie proporcjonalne.

Dwie średnie proporcjonalne dla a i $2a$ dają podwojenie sześcianu,

bo jeśli $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, to $y = \frac{x^2}{a}$ i $y^2 = 2ax$,

a więc $\frac{x^4}{a^2} = 2ax$, czyli $x^3 = 2a^3$,

zatem $x = \sqrt[3]{2}a$.



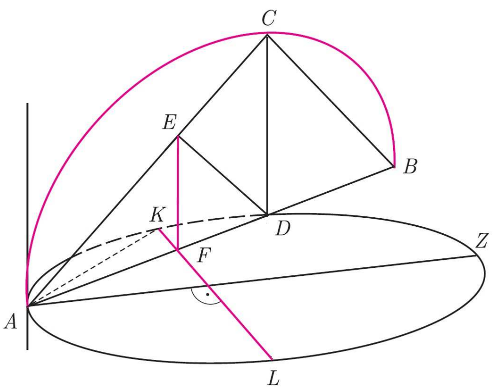
Potrzebny jest więc trójkąt, taki jak obok, w którym $AB = 2AE$, bo wówczas $AD = \sqrt[3]{2}\ AB$.

Archytas posłużył się rozumowaniem, które później zyskało nazwę analiza Starożytnych. Polega to na przyjęciu, że mamy już poszukiwany obiekt i kolekcjonujemy (a więc staramy się odnaleźć) najrozmaitsze jego właściwości, bo przecież to niemożliwe, by jedyną jego cechą było spełnianie definiującego go warunku.

A wśród uzyskanych jego cech, być może, znajdą się i takie, które pozwolą nam go skonstruować.

Załóżmy więc, że mamy poszukiwany trójkąt. Możemy nawet dać mu byt materialny (np. wykonać go z drutu), jak też wyposażyć w półokrąg (również druciany), w który – jako trójkąt prostokątny – jest wpisany.

I to jest przyrząd, z którym Archytas przystąpił do konstruowania podwojenia sześcianu. Konstrukcja będzie przestrzenna!

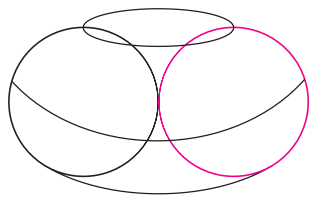


Na płaszczyźnie rysujemy okrąg o średnicy $2a$. W jednym z jego punktów wystawiamy prostopadłą i w płaszczyźnie tej prostej umieszczamy nasz trójkąt z opisanym na nim półokręgiem.

Obracamy teraz ten trójkąt względem narysowanej prostej dotąd, aż spodek jego wysokości znajdzie się na narysowanym okręgu. Wskażemy trzy powierzchnie przechodzące przez punkt C.

Pierwsza jest oczywista – to walec, którego podstawą jest narysowany okrąg.

Druga to „torus bez dziurki", który powstałby, gdybyśmy czerwony półokrąg uzupełnili do okręgu, i obracali dokoła narysowanej prostej.



Aby wskazać trzecią powierzchnię, opuszczamy prostopadłą z E, otrzymując F, przez który prowadzimy prostopadłą do średnicy okręgu, otrzymując K i L, jednakowo odległe od A, bo cięciwa prostopadła do średnicy jest przez nią połowiona.

Mamy $EF^2 = AF \cdot FD = KF \cdot FL$.

Pierwsza z równości to fakt, że w trójkącie prostokątnym wysokość jest średnią geometryczną odcinków, na które dzieli przeciwprostokątną. Druga wynika z potęgi F względem okręgu (iloczyn odcinków na przecinających się siecznych jest równy).

A skoro $EF^2 = KF \cdot FL$, to trójkąt KEL jest prostokątny i można na nim opisać okrąg o środku na średnicy AZ. Płaszczyzna tego okręgu jest prostopadła do AZ, zatem $AK = AL = AE = a$.

Proste z A, przechodzące przez ten okrąg, tworzą stożek, na którym leży punkt C. Kąt, jaki tworzą jego tworzące z osią (którą jest AZ), każdy odgadnie: to 60° – cięciwy AK i AL są równe promieniowi okręgu.

I tak trzecia powierzchnia została zidentyfikowana. mamy więc leżący w ich przecięciu punkt C, a wobec tego i poszukiwany D.

Podziwowi dla konstrukcji Archytasa towarzyszyć jednak musi refleksja, że po bardzo prostym konchoidografie do tryskecji konstrukcje kwadratury koła Dinostratosa i Archimedesa operują już dość skomplikowanymi środkami, ale środki użyte przez Archytasa niewątpliwie są znacznie bardziej złożone.

Pytanie o prawomocność używania w konstrukcjach geometrycznych takich czy innych środków zostało – właśnie z racji rozwiązania przez Architasa problemu podwojenia sześcianu – postawione przez współczesnego mu Platona.

Po argumenty w tej kwestii Platon sięgnął do ogólnej koncepcji nauki, w której głosił skrajnie radykalne tezy.

Nauka ma, zdaniem Platona, polegać na intelektualnym kontakcie ze światem idei, w którym panuje wszystko ogarniający ład.
Rzeczywistość, z którą mamy do czynienia, jest tylko bardzo niedoskonałą podpowiedzią, jak owe idee wyglądają. Im bardziej będziemy umieli się od realiów oderwać, tym bliżej znajdziemy się świata idei. W szczególności czerpanie wiedzy z doświadczenia i wyciąganie wniosków ze skuteczności praktycznych działań tylko zaciemnia prawdę świata idei.

Stąd posługiwanie się przez Archytasa (i współczesnego im Hippiasza) urządzeniami mechanicznymi w celu uzyskania faktów matematycznych jest nie dość, że kłamliwe, to jeszcze świętokradcze.

Debatę między Platonem i Archytasem Cyprian Norwid opisał w postaci następującego wiersza/dialogu
(*o dziwo, wcale nie nazywał się Kamil, lecz Cyprian Ksawery Gerard Walenty Norwid*)

ARCHITA

Geometrycznej nieświadom nauki
Widziałem prosty lud, kładący bruki,
I, jako kamień jedna się z kamieniem,
Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem,
Aż żal mi było bezwiedności gminu,
Mimo że wieczną on jest miarą czynów!...
Więc – Geometrii myślane promienie
(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenię,
Sferyczność w drzewie wykluwszy toporem
Siłami ramion pchnę brązowe walce,
Promienne jeśli kołom natknę palce...
To – któż wie...

PLATO

Boskie zmysłowiąc obrysy
Archito! – koturn rzucisz za kulisy –
Języka lotność niebieskiego zgrubisz,
Więc filozofię, Grecję może zgubisz...

ARCHITA

0! Plato... padam przed prawdy bez-końcem
I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płaczę,
Tak wielce wszystko przesiąkłe jest słońcem,
Któremu nie ty, ni ja biegów znaczę;
Dlatego świętych nie zniżę arkanów,
Ani ojczyzny krągłą tarcz wyszczerbię,
Owszem: z tych, które cię dziś rażą, planów,
Z kres tych na Grecji idealnym herbie,
Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwignie
(Lubo promienność uroku w nich stygnie),
Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,
Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,
Sykulów mówię, na przykład, siedziba,
Tą siły ramion zmnożywszy nauką,
Nie zdoła bronić się jak morska ryba?...

PLATO

Przyjdzie i tobie dzień zwycięstwa – sztuko!...

Jak widać, Norwid opowiadał się po stronie Platona, nazywając stanowisko Archytasa zdegradowaniem kontemplacji.

Platon włączanie mechaniki do konstrukcji geometrycznych nie tylko krytykował, lecz proponował restrykcyjne przepisy **prawdziwych** konstrukcji:
po pierwsze, konstrukcja musi być realizowana na płaszczyźnie,
po drugie, musi być realizowana przez kreślenie linii doskonałych.

Wszystkie inne przytoczone tu konstrukcje są późniejsze od konstrukcji Archytasa, a więc też deklaracji Platona i – jak widać – mają jego zakazy za nic.

Ten ostatni warunek oznacza, że muszą to być linie ślizgające się po sobie. Takich linii jest trzy: prosta, okrąg, linia śrubowa, przy czym tylko pierwsze dwie są płaskie.

I tak został ogłoszony kanon konstrukcji geometrycznej, obowiązujący do dziś: konstruować wolno używając jedynie jednostronnej linijki bez podziałki i cyrkla.

Zakazy Platona zostały przez ogół matematyków przyjęte dopiero w matematyce odradzającej się po czasach zastoju podczas pięćset lat trwającego panowania Imperium Rzymskiego (choć przykład Pascala pokazuje, że nie przez wszystkich).

Trysekcji kąta, kwadratury koła i podwojenia sześcianu zatem znów nie umiano wykonać, a na stwierdzenie, że jest to niewykonalne (Wanzel – trysekcja i podwojenie (1837), Lindemann – kwadratura (1882)) przyszło poczekać ponad dwa tysiące lat.