O nieprzemiennym dodawaniu, czyli jak Riemann sumy przestawiał

*Adam GREGOSIEWICZ**, Lublin*

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LVIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Analogie*, Wola Ducka, sierpień 2018.

Redakcja

Od najmłodszych lat, od kiedy tylko zaczynamy rozumieć sens *dodawania*, zdajemy sobie sprawę, że $2+3$ to tyle samo co $3+2$. Trochę później, we wczesnych latach szkolnych, dowiadujemy się, że ta własność dodawania nazywana jest *przemiennością* i zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych, to znaczy $a+b=b+a$ dla wszystkich $a,b\in\mathbb{R}$. W ogólności nietrudno uzmysłowić sobie, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, ..., a_n wartość wyrażenia

$$a_1+a_2+\ldots+a_n$$

nie zależy od porządku czynników. Mówiąc trochę bardziej naukowo, dla dowolnej permutacji π zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ możemy stwierdzić, że wartość sumy

$$a_{\pi(1)}+a_{\pi(2)}+\ldots+a_{\pi(n)}$$

nie zależy od π. Powyższa obserwacja jest tak naturalna, że już na zawsze zapamiętujemy:

kolejność czynników nie ma przy dodawaniu znaczenia!

Złośliwe szeregi

W takim błogim przeświadczeniu spokojnie żyjemy sobie do momentu, gdy z matematycznego bezkresu wyłaniają się *szeregi* liczbowe, czyli wyrażenia postaci

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots,$$

gdzie trzy kropki na końcu oznaczają dodawanie „w nieskończoność". Należy oczywiście zwrócić uwagę, że o ile przejście od sumy dwóch liczb do sumy skończenie wielu liczb nie nastręcza trudności (łączność!), to sprawa wygląda zupełnie inaczej dla sumy nieskończonej. Musimy mianowicie formalnie zdefiniować, czym jest szereg. Dla ustalonego ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ szeregiem o wyrazie ogólnym a_n nazwiemy *ciąg sum częściowych* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowany wzorem

$$S_n := a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Szereg taki oznaczamy przez $\sum a_n$. Może się zdarzyć, że ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę – skończoną lub nieskończoną – powiedzmy L. Piszemy wtedy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = L$$

i mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest *zbieżny do* L, gdy L jest liczbą rzeczywistą, oraz *rozbieżny do* L, gdy L równa się $+\infty$ lub $-\infty$. Liczbę L nazywamy również *sumą* szeregu. W pozostałych przypadkach, to znaczy gdy ciąg $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie ma granicy, mówimy, że szereg jest *rozbieżny*. Przykładami tych trzech sytuacji są, odpowiednio, $\sum_{n=1}^{+\infty}0$, $\sum_{n=1}^{+\infty}1$ oraz $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$. Trochę trudniej uzasadnić, że tak zwany *szereg harmoniczny* $\sum 1/n$ jest rozbieżny do $+\infty$, a szereg $\sum 1/n^2$ jest zbieżny (do $\pi^2/6$).

W kontekście niniejszego artykułu należy oczywiście zapytać,

czy suma szeregu zależy od uporządkowania jego wyrazów?

Odpowiedź nie jest trywialna. Rozważmy *naprzemienny szereg harmoniczny*, to znaczy szereg

$$\sum(-1)^{n+1}/n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots.$$

*Politechnika Lubelska, a.gregosiewicz@pollub.pl

Ciąg jego sum częściowych $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego, ponieważ

$$|S_{n+k} - S_n| \leqslant \frac{1}{n+1}, \qquad n, k \in \mathbb{N}.$$

Oznacza to, że szereg jest zbieżny do pewnego L. Jak nietrudno uzasadnić, L jest liczbą z przedziału $(1/2, 1)$. Wybierzmy teraz inne uporządkowanie wyrazów tego szeregu, tak zwane uporządkowanie Laurenta

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots,$$

które powstaje z naprzemiennego szeregu harmonicznego w następujący sposób: zaczynamy od 1, po czym wstawiamy dwa wyrazy o indeksach parzystych ($-1/2$ i $-1/4$), następnie dopisujemy $1/3$, po czym wstawiamy kolejne dwa wyrazy o indeksach parzystych, itd. Ogólnie: po wypisaniu jednego wyrazu o indeksie nieparzystym wstawiamy dwa wyrazy o indeksach parzystych z zachowaniem kolejności wśród obu grup. Wykażemy, że taki szereg jest zbieżny, ale nie do L! Istotnie,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \ldots = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \\ &= \frac{1}{2}L. \end{aligned}$$

Powyższy rachunek nie jest, oczywiście, formalnym dowodem, gdyż nie operowaliśmy tutaj na sumach częściowych. Nietrudno jednak taki dowód uzyskać, przeprowadzając analogiczne rozumowanie. Udało się nam zatem znaleźć dwa uporządkowania wyrazów szeregu $\sum(-1)^{n+1}/n$, które prowadzą do różnych sum. Zatem

sumowanie nieskończone nie jest przemienne!

Z drugiej strony, na przykład, szereg geometryczny $\sum 2^{-n}$ jest zbieżny do 1 niezależnie od uporządkowania jego wyrazów (co wynika z tego, że wszystkie wyrazy tego szeregu są dodatnie, w odróżnieniu od naprzemiennego szeregu harmonicznego).

Porządki Riemanna

B. Riemann (1826–1866).

Czy można zatem podać jakąś ogólną regułę, która powie nam, kiedy przestawianie wyrazów szeregu nie zmieni jego sumy? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wprowadźmy trzy rodzaje zbieżności. Powiemy mianowicie, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny

- *bezwarunkowo*, jeżeli dla dowolnej bijekcji $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zbieżny jest szereg $\sum a_{\pi(n)}$,
- *warunkowo*, jeżeli jest zbieżny, ale nie bezwarunkowo,
- *bezwzględnie*, jeżeli zbieżny jest szereg $\sum |a_n|$.

Dość łatwo wykazać, że szereg liczb rzeczywistych jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny bezwzględnie. W tym przypadku suma szeregu nie zmienia się przy różnych uporządkowaniach jego wyrazów. Sytuacja jest diametralnie inna w przypadku szeregów zbieżnych warunkowo. Możemy sformułować wspaniałe twierdzenie Bernharda Riemanna, które rozstrzyga sprawę przemienności sumowania nieskończonego.

Twierdzenie Riemanna (1853 r.). *Jeżeli szereg liczb rzeczywistych jest zbieżny warunkowo, to dla dowolnej liczby rzeczywistej można znaleźć takie uporządkowanie wyrazów szeregu, przy którym jego sumą jest ta liczba.*

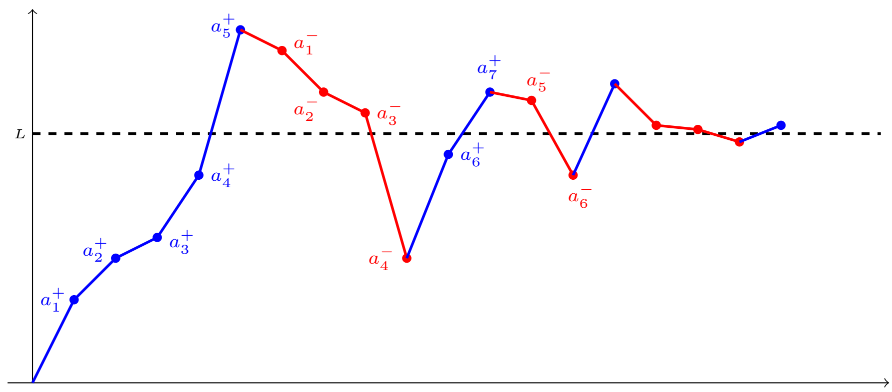
Twierdzenie wydaje się na pierwszy rzut oka niezwykłe. Nie dość, że w przypadku szeregów zbieżnych warunkowo sumowanie nigdy nie jest przemienne, to jeszcze przez różne uporządkowania jego wyrazów możemy jako sumę uzyskać dowolną liczbę rzeczywistą. Oznaczając przez $S(\sum a_n)$ zbiór wszystkich sum szeregu $\sum a_n$ powstałych przez zmianę kolejności jego wyrazów, to znaczy

$$S\Big(\sum a_n\Big) := \big\{L \in \mathbb{R}\colon \text{istnieje bijekcja } \pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \text{ dla której } \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)} = L\big\},$$

możemy twierdzenie Riemanna sformułować równoważnie:

dla każdego zbieżnego warunkowo szeregu $\sum a_n$ mamy $S(\sum a_n) = \mathbb{R}$.

Dowód tego faktu nie jest bardzo trudny. Oznaczmy przez $\{a_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciąg nieujemnych wyrazów szeregu $\sum a_n$ z zachowaniem ich kolejności. Przykładowo a_{13}^+ jest trzynastym wyrazem nieujemnym w ciągu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Analogicznie zdefiniujmy ciąg $\{a_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ wyrazów ujemnych. Ponieważ $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo, to szereg $\sum a_n^+$ jest rozbieżny do $+\infty$, a $\sum a_n^-$ rozbieżny do $-\infty$. Gdyby tak bowiem nie było, to wyjściowy szereg byłby zbieżny bezwzględnie lub rozbieżny. Ustalmy teraz dowolną liczbę rzeczywistą L. Szukane uporządkowanie, przy którym sumą szeregu będzie L, skonstruujemy w następujący sposób: weźmy tyle początkowych wyrazów ciągu $\{a_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$, żeby ich suma przekraczała L. Następnie wybierzmy tyle początkowych wyrazów ciągu $\{a_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$, aby suma wszystkich wybranych elementów (łącznie z nieujemnymi) była mniejsza od L. W kolejnym kroku dokładamy z pozostałych wyrazów nieujemnych tyle, żeby suma znowu przekroczyła L, itd. Wszystko powinien wyjaśnić rysunek 1. Taką konstrukcję można przeprowadzić, gdyż szeregi $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ są rozbieżne do $\pm\infty$. Ponieważ jednak szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to sumy częściowe przy wybranym uporządkowaniu będą coraz bliższe L. Oczywiście, jest to szkic rozumowania, ale uzupełnienie szczegółów technicznych nie powinno już być kłopotliwe.



Rys. 1. Dowód twierdzenia Riemanna. Kropki oznaczają kolejne sumy częściowe dla skonstruowanego uporządkowania.

Przyglądając się dokładniej powyższemu rozumowaniu, możemy sformułować wniosek trochę mocniejszy. Mianowicie, dla dowolnego przedziału skończonego $[a, b]$ istnieje taka bijekcja $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum a_{\pi(n)}$ jest gęsty w $[a, b]$.

Zwróćmy uwagę, że powyższy dowód twierdzenia Riemanna jest konstruktywny. Dla ustalonego L potrafimy nie tylko wykazać, że szukane uporządkowanie istnieje, ale również jawnie je skonstruować. Z drugiej strony, nawet jeżeli znamy sumę szeregu przy danym uporządkowaniu wyrazów, to niewiele potrafimy powiedzieć o jego sumie przy innym uporządkowaniu. Istnieją jednak ciekawe wyniki częściowe. Jednym z nich jest twierdzenie Alfreda Pringsheima, które charakteryzuje sumy naprzemiennego szeregu harmonicznego.

Szereg $\sum a_{\pi(n)}$ nazwiemy *prosto* uporządkowanym względem szeregu $\sum a_n$, jeżeli wyrazy dodatnie i ujemne występują w obu szeregach w tej samej kolejności. Przykładem prostego uporządkowania naprzemiennego szeregu harmonicznego jest uporządkowanie Laurenta.

A. Pringsheim (1850–1941).

Twierdzenie Pringsheima (1883 r.)**.** *Prosto uporządkowany naprzemienny szereg harmoniczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy frakcja wyrazów dodatnich w kolejnych sumach częściowych jest w przybliżeniu stała, to znaczy*

$$\alpha := \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{n} < +\infty,$$

gdzie p_n jest liczbą wyrazów dodatnich w n-tej sumie częściowej. Sumą tak uporządkowanego szeregu jest

$$\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right).$$

W. Sierpiński (1882–1969).

Idąc teraz w trochę innym kierunku, zauważmy, że w uporządkowaniu otrzymanym w dowodzie twierdzenia Riemanna żaden wyraz nie musi pozostać na swoim wyjściowym miejscu. Można zastanowić się, czy istnieje takie uporządkowanie, że otrzymany szereg ma żądaną sumę, a tylko pewne wyrazy zostały przestawione. Piękny wynik tego typu uzyskał polski matematyk Wacław Sierpiński.

Twierdzenie Sierpińskiego (1911 r.)**.** *Teza twierdzenia Riemanna pozostaje prawdziwa nawet wtedy, gdy ograniczymy się do uporządkowań, w których przestawiamy wyłącznie wyrazy dodanie lub wyłącznie wyrazy ujemne.*

Okazuje się zatem, że dla dowolnego L istnieje takie uporządkowanie szeregu zbieżne do L, że wyrazy dodatnie lub ujemne nie zmienią miejsc. Dowody twierdzeń Pringsheima i Sierpińskiego są istotnie trudniejsze od dowodu samego twierdzenia Riemanna.

A jak to jest w wielu wymiarach?

Do tej pory rozważaliśmy wyłącznie szeregi liczbowe. Czy można uzyskać wynik w jakimś sensie analogiczny do twierdzenia Riemanna, ale dla szeregów w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ dla $k \geqslant 2$?

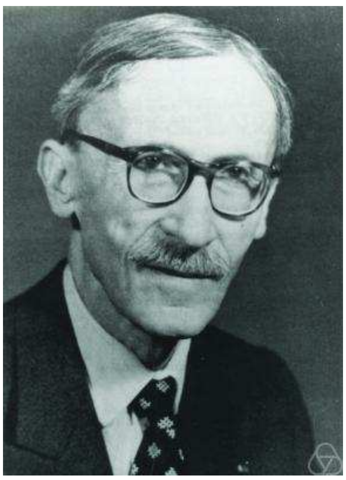
Rozważmy kilka przykładów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, bazujących na naprzemiennym szeregu harmonicznym. Niech $a_n = \big((-1)^{n+1}/n, 0\big)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przenosząc w naturalny sposób definicję zbioru sum $S(\sum a_n)$ na przypadek wielowymiarowy, widzimy na mocy twierdzenia Riemanna, że $S(\sum a_n)$ jest prostą o równaniu $y = 0$. Podobnie dla $a_n = (-1)^{n+1}/n \cdot (1,1)$ zbiorem sum jest prosta o równaniu $y = x$. Po chwili zastanowienia powinniśmy być w stanie wskazać szereg w $\mathbb{R}^2$, którego zbiorem sum jest ustalona prosta postaci $y = ax + b$. Istotnie, wystarczy rozważyć szereg, którego wyrazami są elementy zbioru

$$\{(0,b)\} \cup \big\{\big((-1)^{n+1}/n, a(-1)^{n+1}/n\big) \colon n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Natomiast szereg o wyrazach

$$\big\{\big((-1)^{n+1}/n, 0\big) \colon n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{\big(0, (-1)^{n+1}/n\big) \colon n \in \mathbb{N}\big\}$$

ma zbiór sum równy całej przestrzeni $\mathbb{R}^2$.



P. Lévy (1886–1971).

Czy potrafilibyśmy podać jakąś ogólną regułę, która charakteryzowałaby zbiór sum dla zbieżnego warunkowo szeregu w przestrzeni $\mathbb{R}^2$? Swego czasu, gdy byłem na drugim roku studiów, w moje ręce trafiła ciekawa książka B. Szabata *Wstęp do analizy zespolonej*. Pod koniec pierwszego rozdziału znajduje się tam, między innymi, zadanie, które, w naszej terminologii, mówi, że zbiór sum zbieżnego warunkowo szeregu w $\mathbb{R}^2$ *zawiera* pewną prostą. Przez dłuższy czas próbowałem bezskutecznie dowieść tego faktu. Dopiero po kilku miesiącach znalazłem w innej książce informację o twierdzeniu, którego szczególnym przypadkiem jest powyższe zadanie.

Twierdzenie Lévy'ego-Steinitza (1905 r., 1913 r.)**.** *Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem w $\mathbb{R}^k$ dla ustalonego $k \geqslant 1$. Zbiorem sum $S(\sum a_n)$ tego szeregu jest zbiór pusty lub przesunięcie podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{R}^k$, to znaczy $S(\sum a_n) = \emptyset$ lub*

$$S\Big(\sum a_n\Big) = v + M$$

dla pewnego $v \in \mathbb{R}^k$ i pewnej podprzestrzeni liniowej M w $\mathbb{R}^k$.

E. Steinitz (1871–1928).

Zwróćmy uwagę, że dla $k = 1$ jest to w istocie twierdzenie Riemanna, gdyż jedynymi podprzestrzeniami liniowymi w $\mathbb{R}$ są zbiór pusty oraz cała przestrzeń. Innymi słowy, zbiór sum dowolnego szeregu liczb rzeczywistych jest zbiorem pustym, zbiorem jednopunktowym lub prostą rzeczywistą.

Pierwszy dowód tego pięknego i mało znanego twierdzenia pochodzi z 1905 roku od Paula Lévy'ego. Kilka lat później, w roku 1913, Ernst Steinitz znalazł lukę w rozumowaniu Lévy'ego. Steinitz sam naprawił błąd, a dodatkowo znalazł zupełnie nowe podejście do problemu.

Dowód twierdzenia Lévy'ego-Steinitza jest trudny i zdecydowanie wykracza poza łamy niniejszego artykułu. Centralnym punktem rozumowania jest – ciekawy sam w sobie – następujący lemat.

Lemat o uporządkowaniu. *Niech $\sum a_n$ będzie szeregiem w $\mathbb{R}^k$. Jeżeli wyrazy a_n dążą do zera oraz istnieje podciąg ciągu sum częściowych zbieżny do L, to L należy do zbioru sum szeregu $\sum a_n$.*

Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że $0 \in S(\sum a_n)$. Pozostaje wtedy sprawdzić, że zbiór sum jest zbiorem liniowym, to znaczy dla dowolnych $s, t \in S(\sum a_n)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy $s + t \in S(\sum a_n)$ oraz $\lambda s \in S(\sum a_n)$. Spróbujmy naszkicować dowód pierwszego z tych warunków.

Niech $I_1 \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem indeksów, o tej własności, że $\sum_{n \in I_1} a_n$ jest bliskie s. Taki zbiór istnieje, gdyż założyliśmy, że s leży w zbiorze sum szeregu $\sum a_n$. Następnie dobierzmy nadzbiór J_1 zbioru I_1, dla którego $\sum_{n \in J_1} a_n$ jest bliskie 0, co można zrobić, gdyż $0 \in S(\sum a_n)$. Analogicznie wybieramy tak nadzbiór K_1 zbioru J_1, aby $\sum_{n \in K_1} a_n$ nie różniło się zbytnio od t. Indukcyjnie konstruujemy teraz ciąg zbiorów

$$I_1 \subset J_1 \subset K_1 \subset I_2 \subset J_2 \subset K_2 \subset \ldots$$

w taki sposób, że

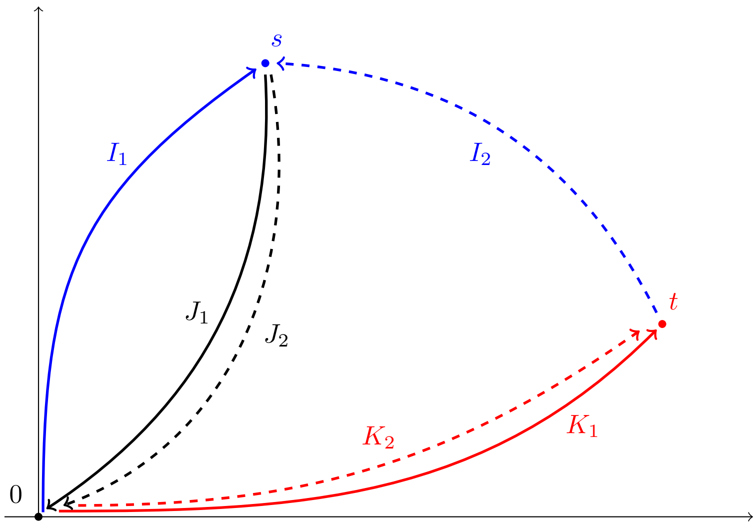
$$\sum_{n \in I_m} a_n \approx s, \qquad \sum_{n \in J_m} a_n \approx 0, \qquad \sum_{n \in K_m} a_n \approx t$$

dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ (zob. rysunek 2). Zauważmy, że

$$\sum_{n \in I_m \cup (K_m \setminus J_m)} \approx s + t.$$

Istnieje zatem podciąg ciągu sum częściowych szeregu $\sum a_n$ zbieżny do $s + t$, co na mocy lematu o uporządkowaniu dowodzi, że $s + t \in S(\sum a_n)$. Oczywiście, w powyższej konstrukcji należy uzupełnić wiele szczegółów, ale zarys dowodu wydaje się jasny. Po szczegóły odsyłam do świetnego artykułu Petera Rosenthala.

P. Rosenthal, *The Remarkable Theorem of Levy and Steinitz*, The American Mathematical Monthly 94, no. 4 (1987): 342–351.



Rys. 2. Szkic dowodu twierdzenia Lévy'ego-Steinitza.

Warto jeszcze odnotować, że każdy zbiór postaci $v + M$ jest zbiorem sum dla pewnego szeregu. Wykorzystując bowiem twierdzenie Riemanna dla naprzemiennego szeregu harmonicznego, widzimy, że szereg, którego wyrazami są elementy zbioru

$$\{v\} \cup \{(-1)^{n+1}/n \cdot e_i \colon n \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, r\},$$

gdzie wektory $e_1, \ldots, e_r$ tworzą bazę przestrzeni M, ma zbiór sum równy właśnie $v + M$.

Co z wymiarem nieskończonym?

Idąc dalej, możemy zapytać, czy wyniki analogiczne do twierdzeń Riemanna oraz Lévy'ego-Steinitza zachodzą w przestrzeniach nieskończeniewymiarowych? To znaczy, czy w nieskończeniewymiarowej przestrzeni (powiedzmy Banacha) zbiór sum szeregu zbieżnego zawsze jest przesunięciem pewnej podprzestrzeni? Okazuje się, że nie!

J. Marcinkiewicz (1910–1940).

Jako pierwszy kontrprzykład znalazł Józef Marcinkiewicz. Rozwiązał on problem 106 postawiony przez Stefana Banacha w *Księdze szkockiej.* Banach pytał, czy jeżeli dany szereg w przestrzeni Banacha przy dwóch różnych uporządkowaniach sumuje się do różnych elementów, to odcinek łączący te elementy również musi leżeć w zbiorze sum tego szeregu. Nagrodą za rozwiązanie zagadnienia była *flaszka wina.* Marcinkiewicz skonstruował ciąg w przestrzeni Hilberta $L^2(0,1)$ funkcji całkowalnych z kwadratem, który przy jednym uporządkowaniu sumuje się do funkcji stale równej 0, a przy innym do funkcji stale równej 1. Jednocześnie funkcje w tym ciągu przyjmują wyłącznie dwie wartości: 0 i 1, więc nie może istnieć takie uporządkowanie, przy którym szereg złożony z tych funkcji sumuje się do funkcji stale równej 1/2. Oznacza to, że zbiorem sum nie może być podprzestrzeń liniowa.

Istnieje jednak szansa, że kontrprzykład Marcinkiewicza wykorzystuje jakąś specyficzną własność przestrzeni $L^2(0,1)$. Być może w innych nieskończeniewymiarowych przestrzeniach Banacha zbiór sum dowolnego szeregu jest przesunięciem podprzestrzeni? Niestety również tutaj odpowiedź okazuje się negatywna. Per Enflo i Mikhail Kadets wykazali niezależnie w latach 1986–1989, że w *każdej* nieskończeniewymiarowej przestrzeni Banacha istnieje szereg, którego zbiór sum jest dwupunktowy! Tym bardziej nie jest więc przesunięciem podprzestrzeni liniowej.

M. Kadets, V. Kadets, *Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence*, *Birkhäuser Verlag*, 1997.

Teoria zbieżności szeregów w przestrzeniach nieskończeniewymiarowych przeżywała intensywny rozwój, szczególnie w drugiej połowie XX w. Uzyskane w tym czasie wyniki, obok twierdzenia Enflo i Kadetsa, są piękne i głębokie, ale wymagają solidnego przygotowania. To jednak temat na zupełnie inną opowieść. Zainteresowanym polecam książkę Kadetsów (ojca i syna).