Refleksje na temat: MATEMATYKA 1919–2019

Edward TUTAJ, Kraków*

Dokonanie sumiennego przeglądu stanu matematyki w 1919 roku i porównanie go ze stanem dzisiejszym to zadanie trudne, przekraczające możliwości autora. Zamiast więc solidnego bilansu będzie garść refleksji sporządzonych w myśl zasady, według której o sprawach łatwych można mówić abstrakcyjnie, sprawy trudne zaś lepiej omawiać na konkretnych przykładach. Przykłady będą, ale – by ich pojawienie uzasadnić – zacznę od pewnego ogólnego spostrzeżenia. Otóż rozwój każdej z dziedzin nauki, w tym matematyki w szczególności, charakteryzuje się pewną cyklicznością. W pierwszej fazie cyklu tego rozwoju gromadzi się fakty. Trochę „bez ładu i składu", chaotycznie. Często te fakty są pozornie odległe, a jedynym kryterium ich zachowania w pamięci jest to, że wydają się interesujące. Gdy się tych faktów nazbiera tyle, że trudno je ogarnąć, pojawia się ktoś, kto wprowadza jakiś ład. Może niepełny, ale ład. I ten ład staje się nowym faktem, od którego rozpoczyna się następny cykl gromadzenia faktów zrazu ze sobą niepowiązanych. I znowu w pewnym momencie pojawia się ktoś, kto proponuje nowy porządek, który rozpoczyna okres kolejny. Chwila, w której dochodzi do wprowadzenia nowego porządku, jest trudna do przewidzenia. Podobnie jak to jest z wybuchem wulkanu, rewolucji czy innej katastrofy. Dobrą ilustrację tej sytuacji zobaczymy, przyglądając się historii astronomii. Starożytni zgromadzili wiele obserwacji, które uporządkował Ptolemeusz. Ale nie wszystko było jasne, nagromadziło się sporo nowych informacji. Pojawił się więc Kopernik, który wprowadził lepszy porządek. Wiadomo już było, co się wokół czego kręci, ale nie było wiadomo „dlaczego". No to pojawił się Galileusz, którego dusza po śmierci zamieszkała w nowo narodzonym Newtonie. Wraz z nimi pojawiła się Grawitacja, z którą mamy do dziś problemy, bo nie wszystko o niej wiemy. Po Newtonie mieliśmy Lagrange'a, Einsteina i innych, w tym niedawno zmarłego Hawkinga. Podobne cykle moglibyśmy wyróżnić w rozwoju fizyki, chemii czy biologii. Nie inaczej było i jest w matematyce. Faktami są twierdzenia, metody, przykłady. Pierwszym wielkim architektem wnętrz w matematyce był Euklides, a wielkim dostarczycielem nowych faktów był np. niewiele później żyjący Archimedes. Z geometrii stworzonej przez Euklidesa, wzbogaconej przez Archimedesa, wyrosło pytanie dotyczące kwadratury koła, na które znaleziono odpowiedź ponad dwadzieścia wieków później. Euklides udowodnił, że dla każdego skończonego zbioru liczb pierwszych istnieje liczba pierwsza, która do tego zbioru nie należy. Twierdzenie to wzbogacali tacy mistrzowie, jak Euler, Gauss, Legendre, Riemann, Hadamard, de la Vallée-Poussin i ciągle pełna prawda (o ile taka istnieje) jeszcze przed nami. Do szczegółów jeszcze wrócimy, ale podsumowując, wstępnie można powiedzieć, że matematyka weszła w wiek XIX-ty z osiągnięciami, które były sumą mnogościową indywidualnych dorobków takich tytanów jak Euklides, Archimedes, Newton, Euler i wielu, wielu innych. Oczywiście, następcy kontynuowali dzieło poprzedników. Newton powiedział skromnie, że „widział dalej, bo stał na ramionach olbrzymów". W dorobku matematyki w okolicy roku 1800 była cała spuścizna Starożytności i Średniowiecza, był dorobek Pascala, Fermata, Newtona, Leibniza, Eulera, Lagrange'a i wielu innych. Pojawiła się rewolucyjna metoda współrzędnych Kartezjusza, pojawił się, dzięki m.in. Newtonowi i Leibnizowi, rachunek różniczkowy i całkowy z równaniami różniczkowymi i rachunkiem wariacyjnym. Wśród artefaktów były takie perełki, jak równość $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ i taka „perełka", jak „równość" $1 - 1 + 1 - 1 + 1... = \frac{1}{2}$ (lub jeszcze ciekawsza „równość", wszakże nieco późniejsza: $1 + 2 + 3... = -\frac{1}{12}$). Oczywiste było, że uporządkowanie tej stajni Augiasza jest konieczne. I odpowiedni Herakles się pojawił i to nie jeden. Było ich wielu, bo i „bałagan" był ponad siły jednego człowieka.

Przyjrzyjmy się bardziej szczegółowo niektórym osiągnięciom dziewiętnastowiecznej matematyki. W algebrze u progu XIX-go wieku (1799 r.) Gauss udowodnił zasadnicze twierdzenie algebry. Udowodnił ostatecznie,

*Instytut Matematyki UJ,
edward.tutaj@uj.edu.pl

bo przed nim i Euler, i d'Alembert, a także Lagrange podawali dowody obarczone pewnym lukami. Ruffini (1801 r.), Abel (1818 r.) i Galois (1832 r.) rozstrzygnęli kwestię nie/rozwiązywalności równań algebraicznych stopni większych niż cztery. W geometrii uporano się z ponad dwudziestowiekowmi problemami. Łobaczewski (1829 r.) i Bolyai (Janos) (1832 r.) uświadomili nam miejsce V-go aksjomatu Euklidesa i istnienie geometrii nieeuklidesowych. Dzięki twierdzeniu Wanzela (1837 r.), uzupełnionym przez twierdzenie Lindemanna (1882 r.), rozstrzygnięto problem konstrukcji geometrycznych, w tym kwadratury koła. Poncelet (1822 r.) i później Steiner, stworzyli geometrię rzutową, wcielając do niej znane od XVII-go wieku twierdzenia Pascala i Desarguesa. Metoda współrzędnych, której narodziny, jak wspomnieliśmy wyżej, przypisuje się Kartezjuszowi, i rozwijająca się wraz z nią algebra liniowa, wypierają – powoli i nie bez protestów – klasyczną geometrię syntetyczną. Zrazu nieśmiało, a z biegiem lat coraz natarczywiej, wchodzą w krwiobieg matematyki wymiar czwarty i wyższe. Twierdzenie „wyborne" Gaussa i późniejszy wykład habilitacyjny Riemanna (1853 r.) (w którym pojawia się pojęcie rozmaitości) dynamizują rozwój geometrii różniczkowej istniejącej przecież od dawna jako część rachunku. Pewne zwieńczenie rozwoju geometrii w XIX-tym wieku stanowi program z Erlangen Felixa Kleina (1872 r.).

Omawianie rozwoju wydarzeń na arenie analizy matematycznej, chociażby tylko w formie spisu treści z nazwiskami i datami, zajęłoby zbyt wiele miejsca. Ograniczę się więc tylko do kilku wybranych faktów. Po pierwsze, „odmitologizowano" rachunek, usuwając zeń wszystkie niezbyt jasne pojęcia typu „nieskończonostki" czy „nieskończenie małe". Wprowadzony przez Cauchy'ego i Weierstrassa język „epsilon-delta" (w istocie definicja granicy) obowiązuje do dziś w podręcznikach i na salach wykładowych. W pierwszej połowie XIX w. pojawiło się twierdzenie o funkcjach uwikłanych nazywane początkowo twierdzeniem o wyznacznikach funkcyjnych. Pojęcie jakobianu było jedną z prób uogólnienia pojęcia pochodnej na funkcje wielu zmiennych, co w konsekwencji doprowadziło do pojęcia różniczki jako odwzorowania liniowego. Twierdzenie podstawowe rachunku różniczkowego i całkowego rozwinęło się przez twierdzenie Greena, twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego i twierdzenie Stokesa do twierdzenia Poincarégo o całkowaniu form różniczkowych na rozmaitościach. Znacząco rozwinęła się metoda rozwijania funkcji w szeregi potęgowe, która pokazała swą siłę w dowodzie twierdzenia Cauchy–Kowalewskiej. Przy tej okazji warto zauważyć, że rozwój analizy matematycznej stymulowany był przez problemy rodzące się w fizyce i w teorii równań różniczkowych. Rachunek wariacyjny – zapoczątkowany przez Bernoullich – „stworzył" równanie Eulera, a równania Cauchy'ego–Riemanna charakteryzują przecież funkcje holomorficzne. Z kolei równanie przewodnictwa cieplnego sprawiło, że pojawiły się szeregi trygonometryczne, a wraz z nimi ogromne źródło nowych problemów, które po latach przyczynią się do powstania analizy funkcjonalnej. Intuicyjnie rozumiane pojęcie całki potrzebnej w formule Newtona–Leibniza doczekało się precyzyjnej definicji w teorii całki Riemanna, która jeszcze przed 1919 rokiem dojrzeje do teorii całki Lebesgue'a i tym samym, *via* twierdzenie Fubiniego, do ustalenia równoważności pojęcia całki jako funkcjonału na stosownej przestrzeni funkcyjnej z pojęciem miary.

Własnymi drogami chodziła pierwsza dwórka królowej Matematyki, jaką jest teoria liczb. Powiem tu tylko kilka słów o dwóch głównych nurtach. Siedemnasty wiek dał nam Wielkie Twierdzenie Fermata (hipotezę WTF) i dowód tej hipotezy pochodzący od samego Fermata dla $n = 4$. Euler udowodnił WTF dla $n = 3$ (metoda spadku), a Legendre dla $n = 5$. Na początku XIX-go wieku zmagano się z $n = 7$ i $n = 11$ oraz pojawił się fałszywy dowód Lamego wykorzystujący własności pierścienia liczb cyklotomicznych, który jednak załamywał się dla $n = 23$. Przez cały wiek XIX-ty (Kummer) „pokonywano" kolejne wykładniki, by u progu wieku XX-go mieć pewność, iż WTF jest prawdziwe dla $n < 101$. Ta pasjonująca wojna trwać miała przez cały następny wiek.

Jeszcze bardziej dramatyczna bitwa toczyła się wokół twierdzenia o rozmieszczeniu liczb pierwszych. Sprawa zaczęła się od wspomnianego już eleganckiego twierdzenia Euklidesa głoszącego (w dzisiejszym języku), że dla każdego skończonego zbioru liczb pierwszych istnieje liczba, która do tego zbioru nie należy. Euler dorzucił do tego swoje twierdzenie o rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych i wprowadził fundamentalną dla tej teorii funkcję zeta. Pod koniec XVIII-go wieku Gauss wprowadził funkcję $\pi(x)$ zliczającą liczby pierwsze i zaproponował jej przybliżenie przez funkcję $Li(x) = \int_2^\infty \frac{1}{\ln(x)}dx$, ale tego rezultatu nie opublikował. Napisał o tym w liście do astronoma Eckego jakieś 30 lat później. W 1808 r. Legendre zaproponował sformułowanie twierdzenia o rozmieszczeniu liczb pierwszych (Prime Number Theorem) w formie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = 1.$$

Na dowód tej wersji trzeba było czekać do roku 1895, kiedy to niezależne dowody podali Hadamard i de la Vallée-Poussin. A przez te 90 lat zdarzyło się wiele. Najpierw (1850 r.) Czebyszew udowodnił nierówność

$$A < \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} < B,$$

dla A, B odległych od 1 o około $0,1$. Kilka lat później do pojedynku z PNT stanął mocarz nad mocarzami, Bernhard Riemann. Wrócił do idei Eulera związanej z funkcją zeta. Najpierw rozszerzył ją do funkcji analitycznej na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem punktu $z = 1$ i w ślad za tym wyprowadził dokładną formułę na $\pi(x)$, uzależniając ją wszakże od pewnej własności funkcji zeta orzekającej, że wszystkie tzw. nietrywialne zera tej funkcji leżą na prostej $Re(z) = \frac{1}{2}$. Ta własność, zwana dziś Hipotezą Riemanna, jest nadal problemem otwartym. Kilkadziesiąt lat później (1903 r.) udowodniono, że HR jest równoważna nierówności

$$|\pi(x) - Li(x)| < \sqrt{x} \cdot \ln(x),$$

w której „nie widać” liczb zespolonych.

Jak napisałem wyżej, porządkowanie matematyki jest źródłem nowych faktów, które stają się zalążkami nowych teorii o znaczeniu nieraz przekraczającym znaczenie problemów, z których wyrosły. Trudności, jakie pojawiły się przy badaniu zbieżności szeregów Fouriera, skierowały (w drugiej połowie XIX-go w.) uwagę uczonych na abstrakcyjne pojęcie zbioru i takie własności, które nie zależą od natury jego elementów (jak np. przeliczalność). Pojawiły się „paradoksy” typu takiego, jak przykład Vitaliego zbioru niemierzalnego czy równość $card(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = card(\mathbb{R})$, o której jej odkrywca, Georg Cantor, pisał w liście do Dedekinda: *dowód jest poprawny, ale tego nie rozumiem.* Narodziły się teoria mnogości, a wraz z nią topologia, których problemy i metody będą żywić matematyków w następnym stuleciu.

Pisząc o matematyce na przełomie stuleci, nie można nie wspomnieć o Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 r. i wykładzie Dawida Hilberta. Ten wykład i sformułowane w nim tzw. 23 Problemy Hilberta w znaczący sposób wpłynęły na rozwój matematyki XX-go wieku. Zastanawiam się, czy Dawida Hilberta i rówieśnego z nim, a zarazem równego talentem Henri Poincarégo zaliczyć do matematyków odchodzącej czy już nowej epoki. Powszechnie uważa się, że ci dwaj genialni matematycy wyprzedzali swoje czasy. Uznajmy ich więc za matematyków już dwudziestego wieku.

Na zakończenie tego przeglądu stanu matematyki u progu XX-go w. przedstawię sylwetki dwóch matematyków z tego okresu. Wybitnych i powszechnie znanych, ale zarazem niezwykłych, nietypowych. Śledząc koleje ich życia, spojrzymy na matematykę XIX-go w. z ich perspektywy. Pierwszy z nich to Jakob Steiner. Urodził się w 1796 r. w Szwajcarii w niewielkiej miejscowości Utzenstorf, która dziś jest przedmieściem Solury (Solothurn). Był ósmym, najmłodszym dzieckiem w rodzinie miejscowych rolników. Podobno (wiemy o tym ze wspomnień jego siostry) już jako dziesięciolatek biegle rachował, prowadząc księgowość rodzinnego gospodarstwa. Prowadził tę księgowość „w głowie”, bo pisać i czytać nauczył się dopiero w wieku 18-tu lat. Wtedy też, wbrew woli rodziców i mimo braku środków, udał się do szkoły w Yverdon (okolice Neuchâtel), którą prowadził sam wielki Heinrich Pestalozzi i w której uczniowie „płacili” za naukę pracą. Był na tyle wyróżniającym się uczniem, że kończąc tę szkołę w 1818-tym roku, dostał listy polecające, które umożliwiły mu kontynuację nauki (matematyki) na Uniwersytecie w Heidelbergu (1818–1821). Następnie, z Heidelbergu przeniósł się do Berlina. Utrzymywał się z korepetycji, których udzielał m.in. w rodzinie Aleksandra, brata Wilhelma von Humboldta, rektora Uniwersytetu w Berlinie. W Berlinie też poznał (i zaprzyjaźnił się) z Carlem Jacobim, Nielsem Abelem, a także Augustem Crelle, założycielem *Journal für die Reine und antgewandte Mathematik*, w którym to piśmie Steiner opublikował większość swoich prac. Jego osiągnięcia stają się znane, uznane, cenione i docenione. W 1833 r. otrzymał doktorat honorowy Uniwersytetu w Królewcu, w 1834 r. wybrano go na członka Pruskiej Akademii Nauk. W 1835 r. objął ustanowioną specjalnie dla niego przez braci von Humboldtów katedrę geometrii na Uniwersytecie w Berlinie, z którą to katedrą był związany aż do śmierci. Zmarł w 1863 r. po długotrwałej chorobie nerek. Nigdy nie założył rodziny. Przyzwyczajony do skromnego życia zgromadził sporą fortunę. W testamencie jedną trzecią przekazał Akademii Berlińskiej na ufundownie nagrody jego imienia, a resztę przekazał na rzecz szkoły w swojej rodzinnej miejscowości Utzenstorf.

Dorobek naukowy Steinera jest ogólnie znany. Jego współcześni uważali go za *najwybitniejszego geometrę od czasów Apoloniusza z Pergi*. Z jego nazwiskiem związane są liczne obiekty matematyczne i twierdzenia, takie jak np.: *system Steinera, powierzchnia Steinera, punkt Steinera, wzór Steinera* (w geometrii wypukłej), *wzór Steinera* (w mechanice), *drzewo Steinera, elipsy Steinera, łańcuch Steinera, symetryzacja Steinera, konstrukcje Steinera, twierdzenie Steinera–Ponceleta, twierdzenie Steinera–Lehmusa*. Uważa się go, obok Ponceleta, za jednego z twórców geometrii rzutowej. Mnie, prywatnie, najbardziej podobają się dowody nierówności izoperymetrycznej autorstwa Steinera. Wprawdzie Weierstrass musiał „łatać” w tych dowodach pewne luki natury topologicznej (związane ze zwartością), ale to w tych dowodach Steiner najpełniej manifestuje potęgę swej pomysłowości geometrycznej. O tym, że Steiner był genialnym geometrą (syntetycznym), powszechnie wiadomo. Mniej znany jest fakt, że Steiner był wrogiem analizy matematycznej, zarzucając jej brak ścisłości. To nie dziwi, zważywszy iż w pierwszej połowie XIX wieku ścisłość w geometrii była na najwyższym w matematyce poziomie, a ścisłość w analizie była dopiero w pampersach, których zresztą wtedy jeszcze nie było. Steiner zwalczał też metodę współrzędnych w geometrii. Podobno w liście do Crellego zagroził, że zerwie współpracę z *Journal für die Reine...*, jeżeli tam będą się ukazywać prace Plückera.

Gdy się śledzi koleje życia Steinera, to pewien fakt budzi zdumienie. Podobno Steiner posiadł sztukę czytania i pisania dopiero w 1814 roku, w wieku 18-tu lat. W tym też roku rozpoczął naukę w szkole Pestalozziego, gdzie, jak sam napisze po latach, proponował nauczycielom własne dowody twierdzeń geometrycznych *lepsze niż te, które oni proponowali.* Wcześniej, jak wspomniałem, wykazywał nadzwyczajną biegłość w arytmetyce. Nasuwa się pytanie, czy można, nie umiejąc czytać, nauczyć się arytmetyki, a zwłaszcza geometrii, bez niczyjej pomocy. Trudno to sobie wyobrazić. W rodzinnej miejscowości Steinera, Utzenstorf, nie było w tamtym czasie żadnej szkoły. Powstanie dopiero, jak wspomniałem, za pół wieku za pieniądze Steinera. W odległej o kilka kilometrów Solurze zapewne jakaś szkoła typu podstawowego była, ale nic nie wiadomo o tym, by Steiner był jej uczniem i by uczył w niej ktoś, kto mógłby – ucząc Steinera – dotrzymać mu kroku.

Drugim matematykiem, którego chciałbym przypomnieć w tych historycznych rozważaniach, jest Srinivasa Ramanujan. Urodził się w 1887 roku w małej indyjskiej wiosce w okolicach Madrasu. Pochodził z biednej rodziny braminów. W odróżnieniu od Steinera Ramanujan uczęszczał do szkół już od 5-go roku życia. W szczególności w 1898 roku wstępuje do liceum w Kumbakonam. Tam trafiła w jego ręce popularnonaukowa książka G.S.Carra *Synopsis of elementary results in pure mathematics* będąca zestawieniem około tysiąca twierdzeń, bez dowodów. Podobno to lektura tej książki zachęciła Ramanujana do samodzielnego uprawiania matematyki. Miał wtedy 15 lat, i nie miał praktycznie żadnej wiedzy o aktualnym stanie badań w odniesieniu do tych zagadnień, którymi się zajmował. A mimo to znalazł wzory pozwalające na rozwiązywanie równań algebraicznych stopnia trzeciego. Opracował też własną metodę sprowadzania równań stopnia czwartego do równań stopnia trzeciego. Oczywiście, mimo iż się starał, nie potrafił znaleźć stosownych wzorów dla równań stopnia piątego. Był wyróżniającym się uczniem, chociaż tylko w dziedzinie matematyki, którą był wg słów jego matki, „opętany”. Któryś z jego nauczycieli nie potrafiących ocenić formuł Ramanujana, zachęcił go do napisania listu do sir G. Hardy'ego, wybitnego specjalisty w dziedzinie teorii liczb, z prośbą o ocenę poprawności i jakości załączonych do listu kilkunastu rezultatów. Ian Stewart, w wydanej niedawno *Krótkiej historii wielkich umysłów* opisuje, oczywiście nieco fantazjując, jak to Hardy z Littlewoodem siedli do studiowania przysłanych notatek Ramanujana z opinią wstępną *ten facet jest albo czubkiem, albo geniuszem.* Po godzinie mieli pewność: *to geniusz.* Dzięki staraniom Hardy'ego Ramanujan otrzymał skromne stypendium, które pozwoliłło mu na pokrycie kosztów podróży i utrzymanie w Anglii. W kwietniu 1914 roku znalazł się w Trinity College i w ten sposób rozpoczęła się jego kilkuletnia współpraca z Hardym, który wdrażał „dziki” umysł Ramanujana w rygory „cywilizowanego” redagowania prac matematycznych.

Ramanujan, w czasie pobytu w Anglii, miał często kłopoty ze zdrowiem. Wynikały one, być może, z dramatycznej różnicy klimatu, a także z pewnych trudności z wyżywieniem. Był on bowiem braminem ściśle przestrzegającym kastowych zasad diety, co 100 lat temu w Anglii i w czasie wojny nie było łatwe. To właśnie z pobytem Ramanujana w szpitalu związana jest słynna anegdota dotycząca liczby 1729. Czytałem różne opisy narodzin tej anegdoty, a jeszcze nieco inną wersję przedstawiają autorzy filmu o Ramanujanie (*The Man Who Knew the Infinity*) z Jeremym Ironsem jako Hardym. A było to tak: Hardy przybył do szpitala taksówką. Ramanujan, podobno przesądny, zapytał o numer taksówki. Hardy odpowiedział. *Nic szczególnego, 1729.* Na co Ramanujan: *Jak to nic szczególnego! Przecież to najmniejsza liczba, która daje się przedstawić na dwa sposoby jako suma dwóch sześcianów.* Dziś wiemy, że 1729 to także trzecia liczba Carmichaela, ale Hardy mógł tego nie zauważyć, bo praca Carmichaela pojawiła się zaledwie kilka lat wcześniej, w 1910 roku. Lekarze nie bardzo potrafili zdiagnozować przyczynę dolegliwości Ramanujana. Podejrzewali wrzód żołądka, a także gruźlicę, na którą go leczyli. Mimo tych kłopotów współpraca z Hardym rozwijała się wyśmienicie. Ramanujan został członkiem Trinity College oraz członkiem Towarzystwa Królewskiego, co wymagało od Hardego wielu zabiegów, by przełamać konserwatyzm jego kolegów.

Oprócz kłopotów zdrowotnych Ramanujan źle znosił rozłąkę z rodziną. Zostawił w Indiach żonę, którą poślubił w 1908 roku, gdy miała 9 lat. W 1919 roku Ramanujan zdecydował się powrócić do Indii. Jego zdrowie pogarszało się. Zmarł w Madrasie w 1920 roku.

Trudno by było wyliczyć tu wszystkie godne uwagi odkrycia Ramanujana. Nad wieloma jego hipotezami do dziś pracują najwybitniejsi specjaliści.
We wspomnianym filmie o Ramanujanie *The Man Who Knew Infinity* wyeksponowany był wątek tzw. „partycji”. Niech $p(n)$ oznacza liczbę różnych sposobów przedstawienia liczby n jako sumy mniejszych od n liczb naturalnych. W filmie Ramanujan podejmuje współzawodnictwo z pewnym majorem, także profesorem w Trinity, kto lepiej przybliży $p(n)$ dla $n = 200$. Dziś wiemy, że $p(200) = 3972999029388$ i umiemy to dokładnie obliczyć dzięki formule znalezionej przez Ramanujana.

Za kilka dni (od chwili, gdy to piszę), 14 marca, obchodzić będziemy doroczne święto liczby π. Znanych jest wiele formuł przedstawiających liczbę π w formie sumy jakiegoś szeregu. Jedna z najbardziej oryginalnych formuł pochodzi od Ramanujana. Wygląda ona tak:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

Budzi szacunek! Dziś znane są jeszcze szybciej zbieżne szeregi, ale powyższa formuła była pierwszą tego typu.

Wypada mi usprawiedliwić wybór właśnie tych dwóch matematyków do bardziej szczegółowego przedstawienia ich dorobku. A było w czym wybierać!. Na liście byli/są przecież Cauchy, Dirichlet, Gauss, Hilbert, Jacobi, Poincaré, Riemann, Weierstrass. I wielu innych. Dlaczego więc Steiner i Ramanujan? Otóż gdy przyjrzymy się rozwojowi matematyki od Starożytności do XIX-go wieku, to widzimy pewną żywiołowość tego rozwoju. Wybitni twórcy pojawiają się losowo i w czasie, i w przestrzeni. Rodzą się i w pałacach, i w wiejskich zagrodach. Na wyżyny twórczości matematycznej wynosi ich często wyłącznie siła własnego talentu i ich droga na szczyty niekoniecznie prowadzi przez korytarze renomowanych akademii, uniwersytetów, etc. I ci dwaj matematycy – Steiner i Ramanujan – to właśnie ilustrują. Do matematyki zawiódł ich imperatyw wewnętrzny. Obaj byli samoukami, chyba ostatnimi – jeśli nie liczyć Banacha – samoukami tego rodzaju. Obaj musieli pokonać wielki opór materii (brak środków, sprzeciw rodziny), by wejść do grona matematyków. To, co ich jeszcze łączy, to nadzwyczajna oryginalność matematycznego spojrzenia. Hardy powiedział o Ramanujanie (cytuję za I. Stewartem), że *„gdyby wcześniej się zetknął z matematyką uniwersytecką, to zostałby wybitnym profesorem któregoś z uniwersytetów europejskich, ale matematyka by na tym straciła”*. W XIX-tym wieku rozpoczęły się zmiany w rozwoju matematyki. Stał się on bardziej usystematyzowany i zorganizowany. I, być może, w przeczuciu tej zmiany dziejowej dwie najważniejsze gałęzie matematyki, geometria i teoria liczb, obdarowały nas tymi wielkimi uczonymi, Steinerem i Ramanujanem.

Przejścia między okresami historycznymi nigdy nie są ostre. Data 1919 jako koniec matematyki dziewiętnastowiecznej i początek dwudziestowiecznej to oczywiście data umowna, związana z poważnymi zmianami politycznymi, jakie wtedy zaszły.

To, na co trzeba w pierwszym rzędzie zwrócić uwagę, chcąc mówić o matematyce XX-go wieku, to pojawienie się całkiem nowych jej gałęzi. Na pierwszy plan wybijają się badania związane z podstawami matematyki. Narodziny tych nowych dyscyplin miały wprawdzie miejsce już w drugiej połowie XIX-go wieku, ale to dopiero w pierwszych dziesięcioleciach XX-go wieku nastąpił ich bujny rozwój. Wyliczając te nowe dyscypliny, wypada zacząć od teorii mnogości i topologii. A topologia to nie tylko topologia teoriomnogościowa, ale i topologia algebraiczna, topologia kombinatoryczna, topologia rozmaitości, topologia różniczkowa, topologia nieskończenie wymiarowa i „inne” topologie różniące się nieco zakresem badań i metodami. Do tego obszaru zaliczyć trzeba logikę matematyczną i teorię algebr Boole'a.

Wysiłek zrozumienia metod analizy matematycznej wykorzystujących algebrę liniową z jednej strony, a z drugiej metody topologiczno–geometryczne, doprowadził do powstania analizy funkcjonalnej, chyba najbardziej charakterystycznej dyscypliny matematycznej dla pierwszej połowy XX-go wieku. Język analizy funkcjonalnej i jej metody radykalnie odmieniły sposób wykładania rachunku różniczkowego i całkowego. Dodajmy, że teoria dystrybucji, jeden ze sztandarowych „wynalazków” dwudziestowiecznej matematyki, jest częścią analizy funkcjonalnej.

Za charakterystyczny dla matematyki dwudziestowiecznej należy uznać zespół tych części matematyki, które zajmują się algebraizacją geometrii, lub – jak kto woli – geometryzacją algebry. Pierwsze twierdzenia zaliczane dziś do geometrii algebraicznej, czy szerszej geometrii analitycznej (Ga-Ga), pojawiły się w drugiej połowie XIX-go wieku (krzywe eliptyczne, szkoła włoska), ale to dopiero w XX-tym wieku geometria algebraiczna stała się liderem matematycznych dyscyplin. To przecież na gruncie geometrii algebraicznej, do czego jeszcze wrócimy, pojawił się dowód hipotezy Fermata.

Do „nowych”, powstałych w XX-tym wieku dyscyplin matematycznych zaliczyć też trzeba rachunek prawdopodobieństwa, który nabrał wigoru po aksjomatyzacji Kołmogorowa. Inną, „nową” dyscypliną w dwudziestowiecznej matematyce, są układy dynamiczne, a w układach dynamicznych tkwią przecież fraktale, z takimi „dziwami” jak *żuk Mandelbrota* czy niecałkowite wymiary.

Nowe matematyczne zagadnienia badawcze pojawiły się w ostatnich dziesięcioleciach na styku matematyki i informatyki. Wszystkie te „nowe” dyscypliny matematyczne nie okazały się gwiazdami jednego sezonu. Rozwijają się nadal, chociaż niektóre, być może, z mniejszą intensywnością. Podkreślić tu trzeba z całą mocą, że te nowe kawałki matematyki powstały „na zamówienie” klasycznych dyscyplin matematycznych, w szczególności rachunku różniczkowego i całkowego, i chociaż z czasem się usamodzielniły, to przecież wartość „nowych” dyscyplin i ich rezultatów jest oceniana głównie z punktu ich przydatności w klasycznych dyscyplinach.

Opisując na ogólnym poziomie matematykę XX-go wieku, trzeba wspomnieć o kilku zjawiskach, które miały znaczący wpływ na jej rozwój. Świat w XX-tym wieku był areną dwóch wojen światowych. Istnieją poglądy mówiące, że wojny przyczyniają się do rozwoju nauki. W przypadku matematyki można się powołać np. na Allana Turinga i osiągnięcia kryptologów. Ale, *per saldo*, matematyka w obu wojnach, w szczególności w tej drugiej, poniosła przeogromne straty. Oczywiście, głównie osobowe, ale także wszelkiego rodzaju straty związane z trudnościami niesionymi przez wojnę.

Jak już wspomniałem wcześniej, w 1900 roku w Paryżu odbył się Kongres Matematyczny, na którym Dawid Hilbert ogłosił swoje słynne 23 problemy z przesłaniem, iż są to najważniejsze problemy, jakie stoją przed matematykami w nadchodzącym dwudziestym wieku. Jeden z tych problemów dotyczący równoważności przez pocięcie w $\mathbb{R}^3$ został rozwiązany już w 1901 roku (Dehn), a rozwiązanie innego, Wielkiego Twierdzenia Fermata (Andrew Wiles) w 1993 roku zwieńczyło wiek XX-ty. Hipoteza Riemanna trzyma się dzielnie, chociaż kilka miesięcy temu ogłoszono, że sir Michael Atiyah ją „zmógł”. Alarm, nie po raz pierwszy, okazał się fałszywy. Chociaż można mieć różne zdania o ważności pozycji w matematyce tego czy innego problemu Hilberta, to jest rzeczą bezdyskusyjną, że dla dwudziestowiecznych matematyków problemy te były i są problemami z najwyższej półki. Mówiąc o kongresach matematycznych, organizowanych cyklicznie co cztery lata w różnych częściach świata, trzeba wspomnieć o wręczanych przy tej okazji Medalach Fieldsa. To też był i jest jeden z czynników stymulujących rozwój.

Nie ulega wątpliwości, że omawiając historię matematyki w ostatnich kilkudziesięciu latach, trzeba przyjrzeć się roli, jaką odegrała grupa matematyków o nazwie Bourbaki (Nicolas Bourbaki). Narodziła się ona w latach trzydziestych w jednej z kawiarni przy Boulevard St. Michel w Paryżu, a impuls, który sprowokował powstanie tej grupy, pochodził od strony nauczania. Podobno było to tak, że młody Cartan (Henri) skarżył się Weilowi na poziom wykładów analizy matematycznej (na Uniwersytecie w Strasbourgu, gdzie pracowali, ale i w innych uczelniach francuskich), które prowadzili „starzy” profesorowie według podręcznika Goursata. Weil rzucił myśl napisania „szeregu tekstów” matematycznych od podstaw z wiodącą ideą, którą miało być uwypuklenie struktur. Dostrzeżenie struktur to jedna z naczelnych zdobyczy matematyki przełomu XIX-go i XX-go wieku. Wielką ich orędowniczką w algebrze była Emma Noether. Według bourbakistów w matematyce występują struktury czterech rodzajów: porządkowe, algebraiczne, topologiczne i teoriomiarowe. W konkretnych obiektach matematycznych te struktury mogą występować równocześnie przy spełnieniu stosownych warunków zgodności. Najprostszym, i kto wie, czy nie najważniejszym przykładem takiego amalgamatu struktur, jest zbiór liczb rzeczywistych. Jest on ciałem algebraicznym (algebra), uporządkowanym (porządek), zupełnym (topologia, metryka) i w którym funkcjonuje jednowymiarowa miara Lebesgue'a. Opisanie okoliczności powstania grupy Bourbaki, wymienienie wszystkich jej członków, którzy chociażby okresowo w niej działali, omówienie dorobku tej grupy i wpływu na współczesną matematykę, to temat na odrębny, bardziej obszerny artykuł.

Także z braku miejsca, a i niedostatecznych kompetencji, nie podejmę zadania bardziej szczegółowego omówienia najbardziej znaczących osiągnięć matematyki minionego stulecia. Być może niektóre z tych osiągnięć, które kiedyś będą uznane za superważne, dziś są już opublikowane, ale jeszcze niedostrzeżone. By się jednak nie uchylić całkowicie od przedstawienia jakiejś listy, wymienię kilka rezultatów, które w swoim czasie wywołały rodzaj wstrząsu w środowisku. Może wstrząs to słowo zbyt mocne, może lepiej mówić o chwilowej i/lub lokalnej ekscytacji. Wybór będzie autorski, co mi proszę wybaczyć, ale przecież wiadomo, że każdy z nas reaguje na nieco inne podniety (w szczególności matematyczne).

Zacznijmy tę wyliczankę wstrząsów od perypetii jeszcze z przełomu wieków z antynomiami Russella, pewnikiem wyboru *etc.* Narodziły się wtedy spory i podziały (konstruktywiści), które trwają do dziś. W latach dwudziestych topologia mnogościowa potwierdziła swą siłę powstaniem teorii wymiaru. W latach trzydziestych mieliśmy do czynienia ze wstrząsem wywołanym przez twierdzenie Gödla o niezupełności, które zniszczyło jeden ze snów Hilberta. Z początkiem lat czterdziestych pojawiło się twierdzenie Sarda, wiążące w elegancki sposób różniczkowanie z miarą, uważane słusznie za jedno z najważniejszych twierdzeń analizy matematycznej.

W 1948 roku Erdős opublikował elementarny dowód twierdzenia o liczbach pierwszych wykorzystując pewien rezultat Selberga. „Ekscytacja" polegała w tym przypadku na tym, iż specjaliści nie wierzyli w możliwość udowodnienia PNT bez wykorzystywania metod analizy zespolonej. Oczywiście, „elementarny" nie znaczy w tym przypadku „łatwy" ani „krótki". W kilka miesięcy później Selberg opublikował „swój" elementarny dowód PNT. Obaj ci wielcy matematycy nieco się przy tym poróżnili, co jest opisane w literaturze „okołoprzedmiotowej".

Kolejną ekscytację wywołało pojawienie się teorii dystrybucji, która „pozwalała" na różniczkowanie wszystkich funkcji ciągłych (lokalnie całkowalnych). Wiązano z tą teorią duże nadzieje. W tym samym czasie (początek lat 50-tych) Nagata i Smirnow (niezależnie) podali charakteryzację topologiczną przestrzeni metryzowalnych, wykorzystując wynalezione 10 lat wcześniej przez Dieudonnégo pojęcie parazwartości. Ten piękny rezultat zamykał złoty okres rozwoju topologii mnogościowej.

Zdumienie wzbudził rezultat Milnora (1957 r.) o istnieniu 28-miu nierównoważnych struktur różniczkowych na S_7. Z początkiem lat 60-tych Cohen rozprawił się z hipotezą continuum, dowodząc jej niezależności od pewnika wyboru. W tym samym czasie Anderson i Kadec udowodnili, spodziewane zresztą, twierdzenie o tym, że wszystkie ośrodkowe przestrzenie Banacha są homeomorficzne. To twierdzenie oraz udowodnione w tym samym mniej więcej czasie twierdzenie (Klee, Bessaga) mówiące, że w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta cała przestrzeń jest homeomorficzna ze sferą jednostkową, położyły na łopatki całą topologię nieskończenie wymiarową. Z początkiem lat 70-tych Enflo rozwiązał jeden z problemów z Księgi Szkockiej, konstruując przestrzeń Banacha bez bazy Schaudera, za co otrzymał od Stanisława Mazura obiecaną w Księdze żywą gęś. Konstrukcja przestrzeni bez bazy (ogólniej bez tzw. własności aproksymacji) potwierdzała to, czego się spodziewano, a mianowicie, że klasa przestrzeni Banacha zawiera twory bardzo odległe od przestrzeni Hilberta. Mówiąc o tej problematyce, trzeba podkreślić fundamentalny wkład w jej rozwój Aleksandra Grothendiecka zawarty w jego monografii o produktach tensorowych przestrzeni lokalnie wypukłych. W dwadzieścia lat później, za skonstruowanie tzw. przestrzeni (Banacha) dziedzicznie nierozkładalnej i twierdzenie o dychotomii, Gowers otrzymał Medal Fieldsa. Skoro już mówimy o medalach Fieldsa, to przypomnijmy, że na Kongresie w Warszawie w 1983 r. to odznaczenie otrzymał W. Thurston za swoją hipotezę geometryzacyjną, związaną z hipotezą Poincarégo, o czym jeszcze wspomnę. W 1984 roku Donaldson, zamykając poniekąd problematykę rozpoczętą przez Milnora, wykazał, że w $\mathbb{R}^4$ jest continuum nierównoważnych struktur różniczkowych.

W latach 70-tych wielką karierą zrobiła sformułowana przez René Thoma tzw. Teoria Katastrof, będąca w istocie eleganckim twierdzeniem z teorii osobliwości. Do Teorii Katastrof jeszcze wrócimy.

W 1982 roku Gerd Faltings udowodnił, kilkudziesięcioletnią w tamtym czasie, hipotezę Mordela. Była to przygrywka przed wydarzeniem, które wywołało najwięcej rumoru. A najwięcej rumoru wywołało udowodnienie w 1993 roku Wielkiego Twierdzenia Fermata przez Andrew Wilesa. Być może jest to najważniejsze osiągnięcie matematyki XX wieku, w każdym razie jest, jak dotąd, najgłośniejsze. Historia tego superwstrząsu jest dość złożona. W latach 50-tych japoński matematyk Tanyiama sformułował pewną hipotezę dotyczącą krzywych eliptycznych nazywaną dziś hipotezą Tanyiamy-Shimury. Hipotezę tę rozpowszechnił w początku lat 70-tych André Weil. Pod koniec lat 70-tych matematyk niemiecki Frey zauważył, że gdyby hipoteza Fermata była nieprawdziwa i zarazem prawdziwa była hipoteza Tanyiamy, to istniałyby krzywe eliptyczne (zwane krzywymi Freya) o „dziwnych” własnościach. Innymi słowy Frey sformułował hipotezę, iż z prawdziwości hipotezy Tanyiamy wynika prawdziwość hipotezy Fermata. Hipotezę Freya udowodnili Ribet i Serre w połowie lat osiemdziesiątych. Ostatni krok wykonał angielski matematyk Andrew Wiles, pracujący w Princeton, który w 1993 roku wykazał, że hipoteza Tanyiamy, wprawdzie w nieco słabszej formie, jest prawdziwa, ale to wystarczyło do prawdziwości Wielkiego Twierdzenia Fermata. Pewien dodatkowy dramatyzm tej historii polegał na tym, że jeden z recenzentów wykrył lukę w dowodzie, którą jednak udało się Wilesowi „załatać” z pomocą jednego ze swoich uczniów. Ostateczny tekst pracy ukazał się w 1994 roku.

W obecnym stuleciu już zdążyły się pojawić bardzo znaczące rezultaty. W topologii rozmaitości udowodniono hipotezę Poincarégo (Yau, Hamilton, Pelerman). W teorii liczb udowodniono, że w ciągu liczb pierwszych istnieją postępy arytmetyczne o dowolnej (oczywiście skończonej) liczbie wyrazów (Green, Tao).

Teraz proponuję wędrówkę po dwudziestowiecznej matematyce śladami dwóch jej prominentnych twórców. Pierwszy z nich to André Weil. Urodził się w 1906 roku w zasymilowanej od pokoleń rodzinie żydowskiej. Ojciec pochodził z Alzacji i był lekarzem, a matka Salomea (Selma) Reinherz pochodziła z rodziny rosyjskich Żydów, których na Zachód wygnały pogromy z 1881 roku. André miał młodszą o trzy lata siostrę Simone, później znaną pisarkę, mistyczkę i działaczkę społeczną. Matka bardzo dbała o wykształcenie swoich dzieci. Szukała dla nich najlepszych szkół i zatrudniała licznych korepetytorów. W domu rozmawiało się po francusku i po niemiecku, a czasami po angielsku. Weil wspomina, że postanowił zostać matematykiem w wieku 8-miu lat, gdy u ciotki znalazł jakąś książkę matematyczną i zaczął ją z zainteresowaniem studiować. Musiał wykazywać jakieś szczególne uzdolnienia matematyczne, bo we wspomnieniach o jego dzieciństwie zapisana jest taka scena: matka Selma narzeka przed korepetytorem małego André, że ten nie czyni wystarczających postępów w arytrmetyce. Na to korepetytor: *Nie ma znaczenia, co do niego mówię. Wygląda na to, że on to wszystko już wie.* W czasie wojny Weil przez pewien czas chodził do szkoły w Chartres, a po powrocie do Paryża zaczął uczęszczać do najlepszego chyba liceum paryskiego (Saint Louis), gdzie w 1921 roku spotykał Hadamarda. To właśnie Hadamard doradził mu, by jako nagrodę za wygranie konkursu matematycznego wybrał trzytomową monografię Camilla Jordana *Cours d'Analyse*. Uczy się też języków klasycznych, czyta książkę Artura Eddingtona o teorii względności, uczy się sanskrytu. W 1922 roku zostaje studentem École Normale Supérieure (ENS). Jego kolegami na roku byli m.in. Yves Rocard, ojciec przyszłego premiera Francji i Jean Delsarte, matematyk, bourbakista. W czasie studiów Weil uczęszczał na semiarium Hadamarda w Collège de France, słuchał wykładów Lebesgue'a i Picarda. Po ukończeniu studiów w 1927 r. przez pół roku przebywał na stypendium w Rzymie, gdzie słuchał wykładów Volterry i Severiego, a sam miał odczyt na temat hipotezy Mordella. Przez drugie pół roku przebywał w Getyndze na stypendium Fundacji Rockefellera. Spotkał tam Richarda Couranta, Emmy Noether i innych.

Po powrocie do Paryża Weil finalizował sprawę doktoratu pod kierunkiem Hadamarda. Hadamard namawiał Weila do podjęcia wysiłku w kierunku udowodnienia hipotezy Mordella. Weil nie podjął sugestii promotora i w 1928 roku obronił tezę doktorską na temat *Arithmétique des courbes algébrique* w oparciu o badania rozpoczęte w Getyndze. Jak słusznie zauważył, po latach stwierdzając : *„Miałem rację! Na udowodnienie hipotezy Mordella trzeba było czekać ponad pół wieku."* Odnotujmy, że Weil miał w tym czasie 22 lata! Po doktoracie odbył obowiązkową służbę wojskową (1928/29). Po ukończeniu służby wojskowej wykładał na różnych uniwersytetach w Indiach. Po powrocie do Francji w 1934 roku otrzymał posadę na Uniwersytecie w Strasburgu (gdzie już wykładał Cartan) i pracował tam do wybuchu drugiej wojny światowej. To właśnie w Strasburgu narodziła się idea napisania podręczników matematyki od podstaw. W 1937 roku Weil ożenił się z Eveliną, byłą żoną jego kolegi z grupy Bourbakiego, René de Possela, po uzyskaniu przez nią rozwodu. Z tego związku urodziły się Weilowi dwie córki Sylvie – (1942) i Nicolette – (1946).

Druga wojna światowa bardzo dramatycznie wpłynęła na życie Weila i jego rodziny. Nim jeszcze wojna wybuchła, wobec pogłębiającej się wrogości względem Żydów, Weil postanowił wyjechać do Stanów Zjednoczonych. Nie zdążył jednak tego planu zrealizować. Wybuch wojny zastał go w Finlandii, gdzie był z naukową wizytą u Nevanlinny i Ahlforsa. Nie mógł i nie chciał wrócić do Francji, by nie być wcielonym do wojska, a z drugiej strony nie miał gdzie się udać. W Finlandii uznano go za szpiega i aresztowano, bo znaleziono u niego list od Pontriagina, którego zamierzał odwiedzić w Leningradzie, a ponadto wizytówki *Nicolasa Bourbakiego, członka Królewskiego Towarzystwa Poldavii.* Władze fińskie rozważały rozstrzelanie Weila, jako szpiega, jednak na szczęście Nevanlinnie udało się przekonać władze fińskie, by odstąpiły od tego zamiaru. Zwolniono go z aresztu i odesłano najpierw do Szwecji, potem do Anglii i w końcu do Francji, gdzie osadzono go w więzieniu w Rouan. Warunki w więzieniu były relatywnie znośne. Mógł okazjonalnie widywać się z rodziną, mógł pisać listy, miał książki i mógł pracować naukowo. To właśnie w Rouan, w więzieniu, udowodnił jeden ze swoich najbardziej znanych rezultatów *Riemann hypothesis for curves over finite fields.* Niemniej jego położenie jako Żyda i do tego brata Simone, która aktywnie działała w Ruchu Oporu, skłoniły Weila do wyrażenia zgody na wstąpienie do armii, co było warunkiem uwolnienia go z więzienia. To się udało w maju 1940 roku i przy pierwszej okazji, jaka się nadarzyła, w styczniu 1941 roku, wyjechał z żoną i rodzicami do Stanów Zjednoczonych. Początkowo pracował w mniejszych uniwersytetach, by w 1947 roku dostać posadę na Uniwersytecie w Chicago, gdzie matematyką rządził wtedy Stone. W Chicago Weil przebywał do 1958 roku, po czym przeniósł się do Princeton. Oczywiście, otrzymanie stanowiska w Princeton związane było z jego bardzo już wysoką pozycją naukową. Pracował tam do 1976 roku, kiedy to przeszedł na emeryturę. Weil zmarł w swoim domu w Princeton w 1998 roku.

Powojenne losy Weila potoczyły się tak, jak się potoczyły. To, że nie wrócił na stałe do Francji, było konsekwencją jego postawy w czasie wojny, której część francuskiej opinii publicznej, w tym także środowiska matematycznego, nie aprobowała. Zdecydowanym przeciwnikiem zatrudnienia Weila we Francji był Jean Leray, który w czasie wojny spędził pięć lat w więzieniu. Jak pisze w swoich wspomnieniach Cartier, to właśnie Leray „zadbał" o to, by uniemożliwić Weilowi, mimo jego wielkiej i stale rosnącej pozycji jako matematyka, powrót do Collège de France czy École Normale. Jak dodaje Cartier, była to „wielka szkoda dla młodych matematyków, takich jak ja". Także i Weil nie był admiratorem Leraya, ale na szczęście na co dzień obu panów dzielił Ocean. Zdarzyło się jednak, że doszło do przypadkowego spotkania, które opisuje Cartier. Otóż Leray gościł kiedyś w Princeton i w tym samym czasie przebywał tam na stypendium Cartier. Pewnego dnia Leray i Cartier siedzieli gdzieś na kawie, gdzie niespodziewanie pojawił się Weil. Cartier, który miał świadomość „szorstkiej przyjaźni" obu Panów, udał, że nic o tym nie wie i chcąc ratować sytuację, przedstawił ich sobie. Autor wspomnień nie wspomina, jak się spotkanie skończyło, ale pisze, że następnego dnia usłyszał i od Weila, i od Leraya prawie jednobrzmiący komentarz (w swobodnym tłumaczeniu): *gdyby Pan go znał wcześniej, to by pan wiedział, co to za ziółko.*

Pozycja Weila i w Chicago, i w Princeton była na tyle wysoka, że mógł sobie pozwolić na coroczne, dwu- trzymiesięczne pobyty we Francji. Miał po rodzicach mieszkanie w Paryżu. Odwiedzał przyjaciół (Cartan). Brał udział w niektórych spotkaniach grupy Bourbakiego, chociaż raczej w charakterze gościa, bo formalną rezygnację z członkostwa w grupie złożył po osiągnięciu wieku 50-ciu lat. Wygłaszał czasami wykłady dla młodych. Jednak ci, co go dobrze znali, twierdzą, iż źle znosił świadomość, że jego córka jest bardziej Amerykanką niż Francuzką, a wnuki prawie nie mówią już w jego ojczystym języku.

Myślę, że nie byłoby to poważne, gdybym próbował oceniać dorobek Weila od strony merytorycznej. Zamiast tego zamieszczam przeklejone zestawienie jego książek:

„Weil made a major contribution through his books that include : *Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques (1935), Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie générale (1937), L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (1940), Foundations of Algebraic Geometry (1946), Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent (1948), Variétés abéliennes et courbes algébriques (1948), Introduction a l'étude des variétés kählériennes (1958), Discontinuous subgroups of classical groups (1958), Adeles and algebraic groups (1961), Basic number theory (1967), Dirichlet Series and Automorphic Forms (1971), Essais historiques sur la théorie des nombres (1975), Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker (1976), (with Maxwell Rosenlicht) Number Theory for Beginners (1979), Adeles and Algebraic Groups (1982), Number Theory: An Approach Through History From Hammurabi to Legendre (1984), and Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991) (2011).*"

Dodajmy do tego zestawienia następujące uwagi:

1. Weil to geometra algebraiczny, ale w pracy (1937) wprowadził pojęcie struktury jednostajnej, i tym samym ma gwarantowany rozdział w każdym podręczniku topologii ogólnej.

2. Chociaż sam nie otrzymał Medalu Fieldsa, to otrzymał dwie bardzo prestiżowe nagrody (Wolfa – 1979 razem z Lerayem (!) i Kyoto 1994). Z prac Weila, co podkreślają laureaci, narodziły się dwa Medale Fieldsa (Deligne 1978 i Yau 1982).

3. Jak wspomniałem wyżej, Wielkie Twierdzenie Fermata zostało udowodnione dzięki pojawieniu się hipotezy Tanyiamy. To Weil wprowadził tę hipotezę na szersze wody swoimi wykładami w Princeton i w swoim podręczniku. Często używa się nazwy *hipoteza Tanyiamy-Shimury-Weila*.

4. Jego życie wypełniło prawie cały wiek XX-ty. Wielu było w ubiegłym stuleciu matematyków, którzy zasłużyli na przymiotnik „wielki". Weil był jednym z największych. Zabawne jest to, że Weil jest znany również poza środowiskiem matematyków. *André Weil? Ach wiem! To brat Simone Weil i to w jego mieszkaniu przez jakiś czas mieszkał Trocki.*

Na spacer po dwudziestowiecznej matematyce, ale nieco innymi ścieżkami, zapraszam w towarzystwie innej znakomitości ubiegłego wieku, jaką był René Thom. Urodził się w 1923 roku w rodzinie kupieckiej w miejscowości Montbeliard w środkowo-zachodniej Francji, blisko granicy szwajcarskiej. Już jako uczeń szkoły podstawowej w swojej rodzinnej miejscowości wygrał jakiś konkurs matematyczny. Maturę zdawał w sposób dość skomplikowany, ale taki był wtedy system szkolny we Francji. Część matematyczną zdał w 1940 roku w Besançon. Jak wiadomo, w tym roku wybuchła wojna i rodzice wysłali René wraz z bratem do znajomych w Szwajcarii, a sami pozostali w Monbeliard. Po półrocznym pobycie w Szwajcarii Thom wrócił do Francji i zrobił maturę z filozofii w Lyonie. Następnie kontynuował naukę w Paryżu w Liceum Saint Louis (tym samym, do którego kilkanaście lat wcześniej uczęszczał Weil). W 1942 roku starał się o przyjęcie do École Normale Supérieure, ale bez sukcesu. Udało mu się to dopiero w 1943 roku, ale jak sam przyznaje – „bez błysku". W Europie trwała wtedy wojna lecz studia odbywały się bez zakłóceń. Thom ukończył ENS w 1946 roku, po czym wyjechał do Strasburga (dostał etat badawczy w CNRS), gdzie pracował pod opieką Henri Cartana i gdzie w tym czasie pracowali też Ehresmann i Koszul. W 1951 roku obronił w Paryżu doktorat (promotorem był Cartan). W tej pracy były już zalążki teorii kobordyzmów, za którą Thom dostał później Medal Fieldsa. W tym samym roku otrzymał stypendium na roczny pobyt w Stanach Zjednoczonych, gdzie spotkał m.in. Einsteina, Weyla (Hermana), Steenroda, Calabiego. Po powrocie do Francji wykładał najpierw w Grenoble, a potem w Strasburgu. W 1958 roku otrzymał Medal Fieldsa za kobordyzmy, i twierdzenie o transwersalności. W 1964 roku przeniósł się do IHES w Bures sur Yvette i zmienił zainteresowania matematyczne. Powody tej zmiany tłumaczy Thom w sposób dość szczególny. Pisze tak: *Seminarium Grothendiecka przyciągało cały matematyczny Paryż. Jego techniczna przewaga nade mną była miażdżąca. Nie miałem nic nowego do zaoferowania.* Zajął się więc problematyką opisaną w pracy *Stabilité structurelle et morphogenèse*, w której przedstawia dowód twierdzenia o klasyfikacji osobliwości odwzorowań gładkich. Ta teoria jest popularnie nazywana „teorią katastrof" i przez kilka lat po jej powstaniu było o niej głośno. W naiwnym bowiem odbiorze sądzono, że pozwoli na przewidywanie „prawdziwych" katastrof. Teorią tą interesowali się nie tylko matematycy, ale także przyrodnicy (biologowie, chemicy, fizycy), socjologowie, a nawet językoznawcy. Po kilku latach latach zainteresowanie teorią katastrof znacznie zmalało. Thom komentował to, stwierdzając, że teoria katastrof *umarła, bo była zbyt popularna.*

Thom był także dość radykalnym przeciwnikiem nauczania w szkołach tzw. „nowej matematyki". Twierdził, że *w szkole nie matematyka ma być nowoczesna, lecz jej nauczanie.* Inne jego eleganckie powiedzenie: *Jeżeli w nauce wiadomo dokąd się idzie, nigdy nie zajdzie się daleko.*

Córka Thoma (jedyna), Sylvie Thom, ma dziś 68 lat i jest profesorem historii na Sorbonie (sowietologia).

Jeżeli wybrałem Thoma, by go przedstawić w tym tekście, to przede wszystkim dlatego, że to jeden z najwybitniejszych reprezentantów dwudziestowiecznej matematyki. Jednak dodatkowym argumentem było i to, że Thom to jedyny laureat Medalu Fieldsa, którego poznałem osobiście i mogłem z nim porozmawiać. Pierwszy raz usłyszałem nazwisko „Thom" na początku lat 1960-tych, gdy prof. Łojasiewicz przedstawiał w Krakowie „swój" dowód twierdzenia przygotowawczego Malgrange'a–Mathera–Łojasiewicza. Niewiele wtedy rozumiałem z treści tego twierdzenia, ale zapamiętałem nazwisko „Thom" oraz to, że Łojasiewicz za najważniejszy w tym twierdzeniu uznał udział Thoma, który to twierdzenie sformułował. Myślałem (wtedy), że się przesłyszałem. Dowód, to jest „coś", ale sformułowanie?! W każdym razie Łojasiewicz bardzo Thoma cenił i słyszałem o nim wcześniej, niż dowiedziałem się czegokolwiek o Weilu czy Grothendiecku. Gdy więc w 1968 roku przybyłem do Bures sur Yvette, to wiedziałem, że w pobliżu pracuje i mieszka jeden z najwybitniejszych matematyków tamtego czasu. Dzięki pośrednictwu Bernarda Morina udało mi się Thoma poznać, a nawet porozmawiać z nim o matematyce i nie tylko. W latach 90-tych Thom był w Krakowie, uczestniczył w seminarium Łojasiewicza i wygłosił jeden lub dwa odczyty dla sporej widowni.

Na koniec, ci dwaj, o których tu opowiadałem, czyli Weil i Thom reprezentują – moim zdaniem – typowy dla XX-go wieku przebieg kariery matematycznej. Matematyk XX-go wieku to już nie samouk obdarzony geniuszem, ale raczej geniusz, w odpowiednim momencie zauważony, „odcedzony" przez system, starannie wykształcony i pracujący zazwyczaj w ramach szerszych zespołów. A jaki będzie typowy, genialny matematyk XXI-go wieku? Tego nie wiemy, chociaż mamy pewność, że już dziś siedzi gdzieś w świecie na sali wykładowej lub w laboratorium komputerowym. I, wracając do rozważań z pierwszych stron, nie wiemy, czy w aktualnej matematyce mamy jeszcze porządek, czy już bałagan. My tego nie wiemy. Będą to wiedzieć matematycy w 2119 roku. *Sie werden wissen!*