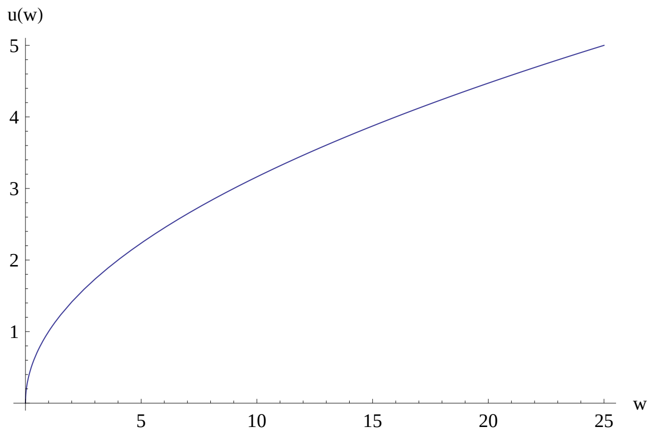
Kto się boi bardziej, czyli współczynnik Arrowa–Pratta

Mariusz SKAŁBA, Warszawa*

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LV Szkole Matematyki Poglądowej, *Co pieniądz robi z nami, a co my robimy z pieniądzem?*, Wola Ducka, styczeń 2017, za który Autor otrzymał Medal Filca za najlepszy odczyt.
Redakcja

W tym artykule przedstawimy podstawy teorii użyteczności oczekiwanej von Neumanna i Morgensterna. Na poniższym wykresie przedstawiono wykres funkcji $u(w)$, tzw. *funkcji użyteczności* dla Bolka.



Na osi poziomej odmierzamy wielkość majątku Bolka w, a na osi pionowej odpowiadający mu poziom satysfakcji, zwany dalej użytecznością danego poziomu majątku w. I tak np. jeśli $u(w) = \sqrt{w}$, to $u(1000000) = 1000$, $u(1210000) = 1100$, $u(1440000) = 1200$. Widzimy na tym przykładzie, że równym przyrostom majątku towarzyszą coraz mniejsze przyrosty satysfakcji (mierzonej funkcją $u(w)$.) Związane to jest z wklęsłością funkcji $u(w)$.

Proponujemy teraz Bolkowi udział w następującej grze: uczciwy arbiter rzuca symetryczną monetą; gdy wypadnie orzeł, Bolek wygrywa 50 zł; gdy wypadnie reszka, przegrywa 50 zł. Takie gry będziemy nazywać loteriami. Loterię l, którą rozważamy, można zakodować tak:

$$l = \frac{1}{2} \circ (w_0 + 50) \oplus \frac{1}{2} \circ (w_0 - 50),$$

gdzie w_0 oznacza majątek początkowy Bolka.

Czy ta loteria jest dla Bolka korzystna? Czy (nieprzymuszany!) Bolek chętnie w nią zagra? Nie potrafimy przewidzieć wyniku i ostatecznego poziomu zadowolenia Bolka, ale możemy obliczyć „zadowolenie” przeciętne, czyli *użyteczność oczekiwaną*:

$$\mathbb{E}(u(l)) := \frac{1}{2}u(w_0 + 50) + \frac{1}{2}u(w_0 - 50).$$

Jeśli funkcja $u(w)$ jest wklęsła (jak na rysunku powyżej), to mamy nierówność

$$\mathbb{E}(u(l)) < u(w_0)).$$

Interpretacja tej nierówności jest następująca: Bolek nie zagra – woli poprzestać na w_0. Powyższa idea rozpatrywania wartości oczekiwanej użyteczności wyniku loterii (w skrócie *użyteczności oczekiwanej* loterii) zajęła ważne miejsce w mikroekonomii w połowie XX wieku. Jednymi z jej twórców są ekonomiści wymienieni w tytule.

Pokażemy teraz bardziej zaawansowany przykład zastosowania teorii użyteczności oczekiwanej do problemu decyzyjnego: kupić ubezpieczenie czy nie kupić?

Przykład 1. Konsument ma majątek początkowy $w_0 = 1440000$ zł i funkcję użyteczności majątku $u(w) = \sqrt{w}$. Stoi w obliczu grożącej mu straty X o rozkładzie $X = 230000$ zł z prawdopodobieństwem $p = 0,02$ oraz $X = 0$ z prawdopodobieństwem $1 - p = 0,98$. Obliczyć maksymalną akceptowalną przez niego składkę ubezpieczeniową P za pełne ubezpieczenie od tej straty.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, skalba@mimuw.edu.pl

Rozwiązanie. Jest to sytuacja wyboru jednej z dwóch loterii:

$$l_{NUB} = 0,02 \circ (1440000 - 230000) \oplus 0,98 \circ (1440000)$$

albo

$$l_{UB} = 0,02 \circ (1440000 - P - 230000 + 230000) \oplus 0,98 \circ (1440000 - P).$$

Wybór loterii l_{UB} oznacza decyzję o zakupie ubezpieczenia. Natomiast wybór loterii l_{NUB} oznacza rezygnację z zakupu ubezpieczenia. Nasz bohater kupi ubezpieczenie, gdy

$$\mathbb{E}(u(l_{UB})) > \mathbb{E}(u(l_{NUB})).$$

Ponieważ

$$\mathbb{E}(u(l_{NUB})) = 0,02\sqrt{1210000} + 0,98\sqrt{1440000} = 1198 \text{ oraz}$$

$$\mathbb{E}(u(l_{UB})) = 1 \cdot \sqrt{1440000 - P},$$

więc akceptowalna składka musi spełniać nierówność $\sqrt{1440000 - P} > 1198$.

Rozwiązujemy tę nierówność ze względu na P i otrzymujemy $P < 4796$. Maksymalna akceptowalna składka P wynosi więc $P = 4795$ zł.

Uwaga. Z punktu widzenia firmy ubezpieczeniowej należna składka netto wynosi

$$\mathbb{E}(X) = 0,02 \cdot 230000 + 0,98 \cdot 0 = 4600 \text{ (zł)}.$$

Składka brutto, którą faktycznie firma zaoferuje (potencjalnym) klientom, na pewno będzie większa. Jeśli wyniesie np. 4750 zł, to zgodnie z naszym modelem Bolek kupi ubezpieczenie, ale jeśli np. 4900, to już nie kupi!

Rozważmy teraz dwie osoby, które zastanawiają się, czy kupić powyższe ubezpieczenie, albo ogólniej, czy podjąć jakieś ryzyko finansowe? Drugą z nich nazwijmy Lolkiem. Ich nastawienie do ryzyka będziemy modelować za pomocą teorii użyteczności oczekiwanej.

Określamy **współczynnik awersji do ryzyka Arrowa–Pratta** jako

$$r(w) := \frac{-u''(w)}{u'(w)}.$$

Powiemy teraz, że *Lolek boi się bardziej niż Bolek* przy poziomie majątku w wtedy i tylko wtedy, gdy

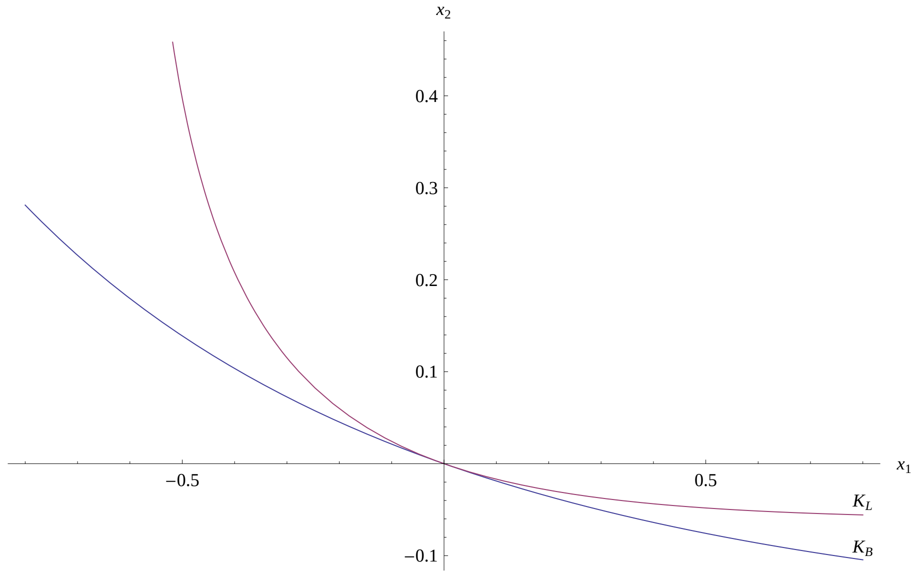
$$r_L(w) > r_B(w). \tag{1}$$

Oto umotywowanie wprowadzonego współczynnika.

Poddamy Bolka następującemu eksperymentowi. Będziemy mu oferować loterie typu $L(x_1, x_2)$:

Niezależny arbiter rzuca kostką. Jeśli wypadnie 4, Bolek wygrywa x_1, a jeśli wypadnie inna liczba oczek, wygrywa x_2.

Trzeba dodać, że zarówno x_1, jak i x_2 mogą być liczbami rzeczywistymi dowolnych znaków. I tak np. loteria $L(50, -8)$ oznacza, że w pierwszym przypadku wygrywa 50 zł, ale w drugim przegrywa 8 zł. Z dwóch nieciekawych loterii $L(30, 10)$, $L(-10, -5)$ pierwsza jest ewidentnie korzystna, a druga niekorzystna. Początkowy majątek Bolka wynosi w_0, a my podsuwamy mu coraz to nowe loterie typu $L(x_1, x_2)$ i każdorazowo każemy mu podjąć decyzję: czy chce w nią zagrać, czy też nie? W ten sposób (przynajmniej teoretycznie) powstaje *zbiór loterii $\mathcal{A}_B(w_0)$ akceptowalnych przez Bolka przy wyjściowym poziomie majątku w_0*. Można łatwo udowodnić, że jeśli funkcja użyteczności Bolka jest wklęsła, a to jest typowe, to zbiór loterii akceptowalnych $\mathcal{A}_B(w_0)$ jest wypukły.



Na rysunku naszkicowano zbiory akceptowalnych ryzyk dla Bolka $\mathcal{A}_B(w_0)$ oraz dla Lolka $\mathcal{A}_L(w_0)$ w ten sposób, że $\mathcal{A}_L(w_0) \subset \mathcal{A}_B(w_0)$. Ponieważ każdą loterię, którą zaakceptuje Lolek, zaakceptuje też Bolek, oraz są loterie akceptowalne dla Bolka, ale jednocześnie nieakceptowalne dla Lolka, więc krótkie stwierdzenie *Lolek boi się bardziej niż Bolek* jest tutaj naturalne. Jak się to jednak ma do nierówności (1)? Aby to zrozumieć, rozważmy krzywą $\mathcal{K}_B$ ograniczającą zbiór $\mathcal{A}_B(w_0)$. Leżą na niej loterie $L(x_1, x_2)$, które są dla Bolka „na granicy akceptowalności", a zatem stosując kryterium użyteczności oczekiwanej, dostajemy równanie opisujące punkty na tej krzywej:

$$\frac{1}{6} \cdot u(w_0 + x_1) + \frac{5}{6} \cdot u(w_0 + x_2) = u(w_0).$$

Ponieważ $\mathcal{A}_L(w_0) \subset \mathcal{A}_B(w_0)$, więc krzywa $\mathcal{K}_L$ jest w punkcie $(0, 0)$ bardziej zakrzywiona niż krzywa $\mathcal{K}_B$. To tłumaczy właśnie pojawienie się drugiej pochodnej funkcji $u(w)$ we wzorze na współczynnik Arrowa–Pratta $r(w)$, gdyż, jak wiadomo, w każdym wzorze na krzywiznę pojawia się druga pochodna.

Przykład 2. Niech $u_B(w) = \sqrt{w}$, natomiast $u_L(w) = \ln(w)$ dla $w > 0$. Mamy $r_B(w) = 1/2w$ oraz $r_L(w) = 1/w$. Tak więc dla każdego $w > 0$ mamy $r_L(w) > r_B(w)$. Mówimy wtedy, że globalnie (niezależnie od poziomu majątku w) Lolek boi się bardziej niż Bolek.

Pratt udowodnił

Twierdzenie (Pratt)**.** *Następujące warunki są równoważne:*

1. *dla każdego $w > 0$ zachodzi nierówność*
$$r_L(w) > r_B(w),$$
2. *istnieje funkcja $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ rosnąca i wklęsła, spełniająca warunek:*
$$G(u_B(w)) = u_L(w) \text{ dla każdego } w > 0,$$
3. *dla każdego ryzyka ε, spełniającego $E(\varepsilon) = 0$, mamy nierówność:*
$$\pi_L(\varepsilon) > \pi_B(\varepsilon).$$

Wyjaśnimy najpierw, co oznacza $\pi_L(\varepsilon)$ użyte w 3. Jest to z definicji rozwiązanie równania

$$u_L(w - \pi_L(\varepsilon)) = \mathbb{E}u_L(w - \varepsilon),$$

gdzie wartość oczekiwana jest obliczona względem rozkładu zmiennej losowej ε. Użyte w punkcie 3. określenie „ryzyko ε" jest tutaj synonimem określenia „losowa strata ε".

Twierdzenie Pratta ustala równoważność trzech sposobów wyrażenia opinii, że *Lolek boi się bardziej niż Bolek* przy każdym poziomie majątku $w > 0$. Pierwszy sposób używa porównania odpowiednich współczynników Arrowa–Pratta. Drugi sposób przywołuje funkcje użyteczności majątku: Lolek ma bardziej „uwklęśnioną” funkcję użyteczności. Wreszcie trzeci sposób polega na stwierdzeniu, że Lolek boi się bardziej, gdy skłonny jest płacić większe składki ubezpieczeniowe za uniknięcie ryzyka. W zależności od kontekstu konkretnej analizy ekonomicznej jeden z tych sposobów może być wygodniejszy niż pozostałe. Tak więc wartość twierdzenia Pratta nie sprowadza się wyłącznie do jego niewątpliwych walorów estetycznych.

Na koniec wprowadźmy na scenę niezastąpioną Tolę.

Przykład 3. Tola ma funkcję użyteczności majątku postaci $u_T(w) = 1 - e^{-w}$. Ta funkcja też jest wklęsła i dlatego Tola też się boi. Obliczamy $r_T(u)$, aby ocenić, czy boi się bardziej, czy mniej od chłopaków:

$$r_T(w) \equiv 1 \text{ dla każdego } w > 0.$$

Zatem

$$r_T(w) < r_B(w) < r_L(w) \text{ dla } w < 1/2,$$
$$r_B(w) < r_T(w) < r_L(w) \text{ dla } 1/2 < w < 1,$$
$$r_B(w) < r_L(w) < r_T(w) \text{ dla } 1 < w.$$

Interpretacja jest następująca. Gdy wszyscy troje są (jednakowo) ubodzy, Tola boi się najmniej: stosuje ryzykowne strategie inwestycyjne, aby tylko wyrwać się z ubóstwa. W przedziale majątków średnich jej nastawienie do ryzyka jest przeciętne – nie grzeszy ani przesadną odwagą, ani tchórzostwem (rolę ryzykanta odgrywa wtedy Bolek). Wreszcie, w przypadku, gdy są (jednakowo) zamożni, Tola poprzestaje na posiadanym niemałym majątku i nie wchodzi w ryzykowne inwestycje.