Wewnętrzne źródła matematyki

Jerzy MIODUSZEWSKI, Katowice

Początki mego wieku oślepiał blask logicyzmu. Ale nie poszedłem tym śladem. Dawniejsi filozofowie pisali mętnie, ale nieskrępowani logiką, mogli powiedzieć więcej.

Tomasz Grabiński

profesor emerytowany Uniwersytetu w Penzie

Wstęp

Pogląd o wewnętrznej naturze matematyki nie jest nowy, ale ujęcie autora, pomyślane niezależnie, jest oparte przede wszystkim na jego własnych przemyśleniach i ma swoją odrębność. Autor przejmuje swój pogląd od Dedekinda, który tak istotne dla matematyki pojęcie, jakim jest liczba, wywodzi wprost ze „świata naszych myśli".

W przedstawionym przez autora poglądzie nie ma miejsca na matematykę jako gmach. Matematyczność jest zmysłem, jednym z wielu, którymi dysponujemy w konfrontacji ze światem zewnętrznym. Celem artykułu jest wywołanie dyskusji, potrzebnej także i z tego powodu, że poglądy autora – wcale nie aż tak odrębne – są podzielane przez milczącą większość matematyków, sceptycznie nastawionych wobec znanych ujęć całościowych.

Przedstawiany artykuł był poprzedzony odczytem na sesji naukowej w Katowicach i jego streszczeniem w *Postępach Fizyki*, 62.3 (2011). Nieżyjący już Profesor Jerzy Janik zachęcił autora do ujęcia tego szerzej.

Rytm liczby

Lokum matematyki to świat S naszych myśli. Zwrot pochodzi ze słynnego, chociaż niewielkiego i nie do końca zrozumianego przez matematyków, dzieła Richarda Dedekinda *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) – *Czym są i czemu służą liczby?*.

Myśl to pewien ustalony element wspomnianego świata S. Umysł nie jest w stanie powstrzymać się od „myśli o tej myśli", a w rezultacie od „potoku myśli", który jest podobny do potoku liczb. Nie od razu Dedekind doszedł do tego wniosku. Poświęcił dziesiątki stronic, aby z owego potoku myśli wydobyć minimalną nić, taką, jaką tworzą liczby naturalne. Nie wskazywał żadnej konkretnej liczby, lecz rytm indukcji przenikający jego świat S, który jest nieskończony: po przesunięciu o jedną myśl dostajemy ten sam świat S. Liczba nie jest u Dedekinda wytworem ani czasu, ani przestrzeni rozumianych fizycznie, jak u Kanta.

To małe dzieło Dedekinda było jakby koniecznością tego czasu. Ma się przy tym wrażenie, że było przemyślane dużo wcześniej przed jego publikacją. Dedekind, jako uczeń Gaussa, był świadkiem powstawania, a potem twórcą pojęć algebry abstrakcyjnej, która wyszła poza znany układ liczb naturalnych. Obiektem algebry stał się zbiór, którego elementy można dodawać i mnożyć według określonych reguł. Przykładem były liczby zespolone Gaussa, pokazujące, jak można było znany dotąd na nich rachunek przekształcić w system formalny. Ale wkrótce sam Gauss, a potem Peter Lejeune Dirichlet, znaleźli systemy algebraiczne już nowe. W tych systemach nie zawsze 2 plus 2 jest 4. Pojęcie zbioru zmiękczało twarde pojęcia algebraiczne, podobnie jak kiedyś u Greków geometria poddawała oglądowi liczbę, motywując działania na liczbach, poszerzając jej pole oddziaływania matematycznego na nowe zakresy. Bo to już u Greków pojęcie liczby poszerzało się na wielkości ciągłe, które weszły w powszedni użytek w analizie matematycznej stworzonej przez Newtona. Continuum liczbowe, początkowo istniejące w matematyce półintuicyjnie, zostało w końcu ujęte w rygor arytmetyczny wyrażany językiem zbiorów. Leopold Kronecker był zdania, że język ten wzorca wszystkich tych systemów liczbowych, którym są liczby naturalne, już nie tłumaczy, bo te – jak miał mawiać – stworzył Pan Bóg. Nie wykluczamy, że rozmyślania Dedekinda były odpowiedzią na to głośne prowokacyjne powiedzenie Kroneckera. Był matematykiem, a przy tym poważnym filozofem, i wiedział, że dla odpowiedzi w takich kwestiach nie powinno się zatrudniać Pana Boga. Teraz wszakże – przyjmując jego rozwiązanie – niepokoić będzie zagadkowy rytm indukcji, który w jego ujęciu liczby pełni rolę naczelną. Jest obawa wejścia w zakres niebezpiecznych automatyzmów myślowych i pozostawania przy nich. Istotnie, Giuseppe Peano zastąpił ujęcie Dedekinda niemal natychmiast ujęciem aksjomatycznym, co usunęło w cień aspekt filozoficzny dzieła Dedekinda.

Rok 1888 jest tu raczej przypadkowy – swoje *Was sind und was sollen die Zahlen?* Dedekind napisał w myśli już zapewne wtedy, kiedy w roku 1864 powstawał jego *Supplement* 11, w którym dał zręby algebry abstrakcyjnej, a o którym Emma Noether pisała: *to wszystko było już u Dedekinda*. A zwlekał tyle czasu jedynie z powodu swego – jak nazywał – *Treppenverstand*, co na polski tłumaczy się jako *l'esprit d'escalier*. Podobnie zwlekał ze swoją bardziej znaną teorią przekrojów.

Rzeczy, które przemyślał Dedekind, są bezczasowe. Przepadłyby bez śladu, jeśliby nie padły na grunt będącej w pełni rozwoju filozofii niemieckiej. Zwrot „świat naszych myśli" nie był oryginalnym zwrotem Dedekinda.
Był u Bernarda Bolzany i narzucał się filozofom wieku XIX. Jednak Dedekind nie użyłby tego S, gdyby chodziło o jakiekolwiek zamknięcie dla naszych myśli. Nie używamy symbolu dla czegoś nieokreślonego. Za Dedekindem przyjmujemy, że świat S, który – chociaż nie wiemy o nim za wiele – po prostu jest. W odróżnieniu od konstruktów myślowych, które go będą zaludniać, sam konstruktem myślowym nie jest.

Doświadczenie myślowe Dedekinda skłania do wniosku, że w naszej myśli mogą powstawać pewne konstrukcje niezależnie od bodźców zewnętrznych. Nasza myśl nie staje wobec świata bezbronna. Narzucamy światu rytm następstwa i widzimy go jako nieskończony, nie zapytując świata, czy życzy sobie takiego jego rozumienia. Napisał gdzieś Max Scheller, że żyjemy światu naprzeciw.

Czy rytm, który objawia się światu S, jest fragmentem czegoś szerszego – tylko się domyślamy. Jest osią dynamiki świata S. Czy podporządkowuje sobie jego całość? Jest to rytm następstwa. Ale jest też kontemplacją, kiedy myśl płynie w sposób ciągły. Jest to bardziej ukryty bieg myśli. Mamy więc dwa sposoby widzenia zjawisk. W sytuacjach niewerbalnych – a takimi są sytuacje przedmatematyczne – widzimy się w potoku myśli, który jest ciągły.

My wszakże wyodrębniamy oddzielne stany i formułujemy sądy, którym nadajemy formę zdań. I chociaż nasze myślenie wydaje się być ciągłe, to nasza jego ekspresja zdaje się wymagać zamknięć w zdania, które są jakby jego atomami. Atomizm myślowy jest wielką zagadką naszego świata S. Jest, jak się zdaje, jego koniecznością. W pewnych sytuacjach poprzestajemy już tylko na ich formie, poddając ich związki wymaganiom logiki.

Ekspresja, zamykana w oddzielnych sygnałach, coś jednak gubi i nie oddaje zapewne całej – jak byśmy nazwali – przedświadomości. Zgodziłby się z tym zapewne – wyrocznia dla współczesnych filozofów matematyki – Ludwig Wittgenstein, według którego ekspresja językowa ma jakieś naturalne ograniczenia. Aby wyjść poza nie – jak ujmuje jego myśl Alfred Gawroński – uciekamy się do form pozasłownych wyrażających emocje i sięgamy po symbolizm poezji oddający całe zespoły doznań. Jakby dla rozładowania nagromadzonych trudności dodaje, że rozszerzają naszą ekspresję także gry językowe i *pure nonsens*, przez co natrafiamy na myśli niedostępne sądom wyrażanym jako zdania. Wydawałoby się, że nasze nastawienie do świata wyraża się pytaniami. Ale pytania nie padną, jeśli wpierw zdanie oznajmujące nie da mu sposobności. To paradoksalne, ale nie zwracamy się do świata pytaniami, lecz gotowymi zdaniami oznajmującymi.

Potokowi myśli, jakim obdarza nas indukcyjne następstwo, nie towarzyszy bezpośrednia refleksja. Ten potok płynie jakby obok nas. Nie panujemy nad rytmem naszych myśli. Jak pisze Andriej Biełyj, inspirowany matematyczną filozofią swego ojca Nikołaja Bugajewa, *myśli same się myślą.* Potok myśli to nie tylko następstwo liczb, bo są inne znane następstwa. Wspomnijmy potok myśli w *Herzogu* Saula Bellowa czy *Korekcie* Thomasa Bernharda. Nie umiemy wyłączyć się z tego strumienia, o czym pisał Bergson oraz w znanej przed laty książce Ernest Dimnet, a co powtarza współczesny nam Eckhart Tolle. A wiedząc to, tym bardziej powinniśmy znaleźć nad potokiem myśli władzę. W znanej książce pisze Alexis Carrel: *Człowiek . . . powinien wprowadzić spokój w siebie samego.* Wielki uczony nie pisał, czym mogłaby być ta siła kierująca umysłem, ale umiejscawiał ją w nas samych.

Naprzeciw światu

Szum dwudziestego wieku wobec podstaw matematyki w postaci gmachu zagłuszył na długo myśl Dedekinda. Zapewne i czas musiał dojrzeć, bo dopiero już w późnych swoich rozmyślaniach autor natrafił na współczesne dla tej myśli podpory. Skoro nie budujemy gmachu, wydaje się do pomyślenia, że matematyka na swój sposób żyje i jest kierowana jakimś zmysłem, któremu powinniśmy się przyjrzeć. Dużo daje tu codzienne doświadczenie matematyka. Jest to wgląd miękki, pozwalający rozwinąć pewną umiarkowaną mitologię dopuszczającą umiarkowane spekulacje co do natury matematyki, co nauki szczegółowe zdają się potwierdzać.

Świat S jest bogatszy niż to, co daje nam rytm indukcji. Jesteśmy dziećmi Dnia Szóstego. Dostaliśmy wtedy w podarunku świadomość, dającą nam poczucie bycia sobą, poczucie naszej odrębności wobec tego, co nas otacza, a jednocześnie i poczucie wspólnoty z otoczeniem. Zmysły lokują w świecie S całe obrazy odbierane ze świata zewnętrznego. Świat S nie poprzestaje na ich kontemplacji, ale stwarza środki wychodzące naprzeciw atakującym go obrazom. Zastępuje te obrazy właściwą sobie konstrukcją własną. Śledząc tworzenie się pojęć, ma się wrażenie, że jesteśmy sceptyczni wobec zmysłów. Świat S, zanim utworzy własną konstrukcję, kontroluje jeden zmysł drugim, nie poprzestając na jednym aspekcie zjawiska.

Oto tworzy pojęcie koła, którego formę narzuca potem innym „kołom” obecnym w świecie zewnętrznym. Postrzegając te „koła”, ma już zatem zawczasu gotowe wobec nich oczekiwania. Przez długi czas światu S wystarczy jedno koło, zanim nie objawi mu się ono w wielu aspektach. Odkryje, że koło to nie tylko kształt kolisty, ale że jest też przegrodą, a także drogą, po której biegnie punkt. A koło może się także toczyć. Pojęcie się wzbogaca i jest coraz bardziej wymagające.

Nie wszystkim obrazom świat S potrafi przeciwstawiać swoje wzorce, ale ewolucja polega na wzbogacaniu ich zakresu. Odkryje też samotną liczbę 5, która sprawi kłopot, każąc zastanowić się, czy jest elementem rytmu pierwotnego, czy zjawiskiem od rytmu pierwotnego niezależnym. To zastanowienie każe nam odstąpić od wielce obiecującej pokusy obrócenia spostrzeżenia Dedekinda co do liczby w dogmat. Poczucie wzrokowe i czynnościowe, jakim odbieramy liczby małe – nieobce również naszym braciom mniejszym – nie wykazuje związku z rytmem indukcji.

Konstrukcja, jaką świat S obudowuje odbierane obrazy, nie należy do rzeczy samych w sobie w znaczeniu Kanta. Jest czymś, co nasza myśl może naruszyć przy wglądzie. Dlatego nasz kontakt z tą własną konstrukcją jest z natury antynomialny. Nie dotyczy to wszakże rytmu liczby wbudowanego w świat S, do którego ogląd myślowy nie wnika. Nie naruszamy liczby, kiedy się w nią wmyślamy.

W kontakcie z zewnętrzem zazwyczaj kładziemy nacisk na jego poznawanie. To jest punkt widzenia nauki, który będzie tu w dalszym ciągu przeważał nie dlatego, że jesteśmy jego entuzjastami, lecz z faktu znajdowania się w cywilizacji tak nastawionej. Tymczasem my ten świat przeżywamy. To nie jest już jakiś punkt widzenia, lecz istota naszego w świecie przebywania. Trudno w matematyce utrzymać w tym jakąś równowagę. Jej rola poznawcza jest problematyczna. Matematyka odczuwa wielką powinność poznawczą, osiągając w pewnych swych partiach status *scientia*. Równie silne są w niej wszakże tendencje w kierunku *ars*. Wzorce, którymi się otacza, służą do lepszego poznawania zewnętrza, ale jednocześnie stanowią nasze znaki rozpoznawcze dla komunikacji z zewnętrzem. Stanowią też mur obronny przed niechcianymi wpływami. Chcemy, jak monada Leibniza, być wolni od wpływów zakłócających nasze wnętrze, selekcjonując odbierane obrazy według kierujących nami upodobań. Od siebie nawzajem odbieramy jedynie sygnały, które wskazują na określony rodzaj treści. Ten sposób wzajemnej komunikacji sprawia, że nie uczymy się od siebie, przelewając sobie nawzajem całe mózgi. Odbieramy jedynie izolowane sygnały wystarczające dla rozbudzenia w monadzie jej świata wewnętrznego, który ma ona tylko dla siebie. Te sygnały wszakże wystarczą, by powstała wspólnota chroniąca nas od solipsyzmu. Staramy się jednak, by nasz świat wewnętrzny był nieprzystępny dla zewnętrznej – jak pisze – pospolitości. Dzieło sztuki, aby obronić się przed przetworzeniem w kicz, zaznacza choćby jednym szczegółem – może być to nawet skaza – swoją odmienność od środowiska. A przecież tym pospolitym – jak je nieraz widzmy – zewnętrzem się karmimy. Według Arystotelesa nie ma niczego w naszych myślach, co by nie przeszło wcześniej przez zmysły.

Wspomniany już Andriej Biełyj przekazał w swojej powieści *Petersburg* potok myśli, które same się myślą, a w powieści *Moskwa* myśli swojego ojca Nikołaja Bugajewa, który nazywał siebie neoleibnicjonistą. Najczęściej nie czytamy Kanta czy Leibniza. Ich idee przejmujemy od ich kontynuatorów: Kanta – w tym, co dalej – przejmujemy od Konrada Lorenza, monadologię Leibniza przejmujemy od Bugajewa. Rozumiemy wtedy mądrość monadologii, która pozostawia monadom niedostępny intruzom ich stan wewnętrzny. Nie mamy dostępu do cudzych myśli, a jednak potrafimy rozbudzać przesyłanymi sygnałami świat wewnętrzny tych innych. Rozumiemy w ten sposób powstawanie spójnych myślowo społeczeństw. Nie musimy się zaraz na wstępie domyślać orwellowskich skrajności.

Zmysły, które zasiedlają świat S, walczą w nim o miejsce dla siebie. Widzimy wśród nich również zmysł, ten najbardziej wewnętrzny, którego zadaniem jest kształtowanie wspomnianej konstrukcji. Nazwijmy ten zmysł zmysłem matematycznym. Zmysł matematyczny odczuwa przykrość, jeśli dla dostarczonego sobie spostrzeżenia nie znajduje właściwego miejsca. Odczuwa zadowolenie, wręcz spełnienie, z wprawnie wykonywanych czynności. I odczuwa – jak każdy zmysł – głód wrażeń. Ale jest nie tylko świadkiem tworzenia pojęć. Jest, jak dyrygent, uwikłany w emocje dostarczane mu przez cały pozostały koncert zmysłów, z których każdy dołącza tu swoją melodię czy barwę. Nie nazwalibyśmy go zmysłem, gdyby ograniczał się do roli kuriera przenoszonych przez siebie komunikatów. Nie pójdziemy więc za Arystotelesem aż tak daleko, by odmawiać matematykom, a tym samym zmysłowi matematycznemu, zainteresowania treścią przekazu. Wzorce, które wbudowane są w świat S, nie są dokładnie tym, co dają nam zmysły. Zmysł matematyczny je wygładza. Nadaję im formę zgodną z jego poczuciem logiki i estetyki. Potrafi połączyć dwa odczucia zmysłowe w jedno. W ten sposób powstaje pojęcie prostej łączące w jedno promień światła i napiętą nić. Rozumiemy jednak sceptycyzm Filozofa, kiedy widzimy, jak często samo sprawne wykonywanie zadań daje satysfakcję. My zwracamy uwagę również na, właściwe każdemu zmysłowi, jego automatyzmy.

Twórcy matematyki są coraz bardziej skłonni przyjmować, że wyjaśnienie istoty matematyki leży bardziej w rozpoznaniu natury świata S i zmysłów, które go zaludniają, niż w rozpoznaniu treści, jakie niesie matematyka, które, jak się wydaje, matematyka bierze dopiero ze świata zewnętrznego. John von Neumann w swoich wczesnopowojennych esejach (*Chicago University Press* 2947) przyznaje, że nie poznawczość, lecz estetyzm – wręcz samolubność, dodajmy od siebie – jest tym, co kieruje matematyką. Hardy wręcz twierdził, że taka właśnie jest natura matematyki. Ukształtowany w innym świecie pojęć Sziłow (Георгий Канцивели, *Математика и действительность, Историко-мат. Исследования*, 1975) również twierdzi, że matematyka kieruje się w swym rozwoju własnymi, znanymi sobie, prawami.

U swoich początków platońskich matematyka nie zajmowała się swoją wewnętrzną naturą. Odkrywała świat liczb i figur, nie robiąc różnicy między nimi a ich myślowymi obrazami. Nawet nieskończoność platońska była natury fizycznej, zewnętrznej. Ale po Newtonie nie mogliśmy już dłużej nie widzieć, że matematykę budujemy w naszych myślach. Wiek osiemnasty to szturm rozumu. Nie kochamy tego wieku, ale kierunek wtedy nadany jest już nieodwracalny. W wieku dziewiętnastym było już oczywiste, że przedmiot matematyki jest w istocie wytworem naszej myśli. Jako relikty, niezależne od samej myśli, pozostawiano symbolicznie tradycyjne liczby i figury.

Fakty matematyczne sięgają w daleką przeszłość, ale matematykę – w której fakty łączą się ze sobą myślą – stworzyli Grecy. Pitagorejczycy i późniejszy od nich Platon opowiadają się za ujęciami całościowymi matematyki. Sceptyk Arystoteles był jednak zdania, że w budowie pojęć należy iść krok po kroku. Czy to więc nie sceptycyzm Arystotelesa był początkiem coraz bardziej krytycznej analizy pojęć i ich rozbudowy przez nas? Pierwszym znanym przykładem tego dyskursu była kwestia budowy punktowej prostej: czy ma być to narzucające się myślowo punktowe continuum, czy lepiej przyjąć za Demokrytem, że jej budowa jest luźna, na kształt położonych obok siebie atomów? Na tym przykładzie widzimy, jak wokół zjawiska budujemy takie lub inne opowieści, nazywane też użytecznymi fikcjami, które rozbudowują nadawany nam obraz. Czy mamy je odrzucać z powodu nadmiaru fabularyzacji? Gdzieś w tle opowieści jest przecież prawda. Jest też użyteczność. Dedekind twierdził, że jego opowieść o przekrojach pozwala oswoić myślowo pierwiastek z 2.

Matematyka przestaje być nauką o przedmiotach widzianych na jeden sposób. Mieli tego świadomość już filozofowie starożytni, ale przypisuje się ten pogląd dopiero filozofom wieku dziewięnastego, kiedy czas już ku temu dojrzewał. Widzimy świat na różne sposoby. Być może za każdym razem innym zmysłem lub z innej strony. Ale, według Kanta, u podstaw tych sposobów widzenia rzeczy jest rzecz sama w sobie – w ten sposób uratował naszą wiarę w jeden świat. Możemy być nadal nominalistami.

Mając przed sobą figury geometrii Euklidesa i liczby naturalne, jesteśmy niewątpliwie nominalistami. Nie rozszczepiamy tych bytów na aspekty i wielość ich rozumienia. Rzeźbiąc w prawdziwej przestrzeni, nawet mając na uwadze figury jak najbardziej osobliwe, takie jak sfera Aleksandera, wspólne brzegi obszarów płaskich Brouwera czy kontinua dziedzicznie nierozkładalne Knastera, mamy przed sobą jednoznacznie myślane i widziane obiekty. Klasyczna teoria liczb jest również w tym sensie nominalistyczna. Jest wglądem w rzeczywistość niezależną od matematyka, pisze Solomon Golomb – idąc w ślad za Hardym – i odnotowujemy w niej jedynie nasze spostrzeżenia.

Ale jeśli mamy wiele opowieści na dany temat, to zaczynamy się w końcu zastanawiać, czy nie rozmnożyliśmy światów. Tego rodzaju pytania skłoniły matematyków do przyjrzenia się naturze matematyki także z tej strony. Z niepokojem zauważamy, że świat S naszych myśli mógłby zadowolić się czytaniem i przeżywaniem rozbudowywanych przez siebie opowieści, dając zmysłowi matematycznemu zadowolenie z zaspokajania swoich doznań. Obrazy, które tworzy, dają doraźne rozumienie rzeczy. Daleki cel poznawania pozostawiony jest Filozofowi – jeśli użyć słów Arystotelesa. Dodajmy, że samolubność jest cechą umysłu. Jest więc do pomyślenia samolubna matematyka, chociaż może użyliśmy zbyt mocnego słowa.

Metafizyka

Nasze poznawanie świata poprzedzone jest przeświadczeniami metafizycznymi, które wraz z wyrosłymi na nich przekonaniami i oczekiwaniami – ale też, jak pisze Allan Bloom – uprzedzeniami wobec tego, co może przyjść z zewnątrz, tworzą naszą metafizykę. Poznanie matematyczne, wraz z jego tak rozumianym otoczeniem metafizycznym, składa się na coś, co nazwalibyśmy matematycznością.

Wielką w niej zagadką są wspomniane pierwotne wdrukowania, które weszły w nas bez wcześniejszych zapowiedzi, a mamy na myśli przede wszystkim rytm pierwotny dający nam liczbę. Nie jest on poddany naszej zmysłowości, nie panuje nad nim nasza świadomość. Jego status w naszej metafizyce i w naszej matematyczności jest specjalny. Nie naruszamy liczby, kiedy się w nią wmyślamy.

Liczba jest poza czasem. Dla liczby nie musi istnieć przestrzeń, w której miałaby ukazać swoją obecność. Można pomyśleć świat niemający nic oprócz indukcyjnego rytmu liczby nieusytuowanego w żadnej przestrzeni. Pogląd o niezależności pojęcia liczby od pojęć o przestrzeni i czasie przypisaliśmy Dedekindowi. Ale przecież wcześniej byli Pitagorejczycy, a pogląd prymatu liczby głosił również Gottlob Frege, współczesny Dedekindowi. Upatrywał on jednak istotę liczby w jej aspekcie ilościowym, a nie – jak Dedekind – w jej aspekcie porządkowym, dynamicznym, wyznaczonym przez jej rytm indukcyjny.

Chociaż liczba nie potrzebuje przestrzeni, aby się gdzieś znaleźć, to jednak my, chcąc oswoić liczbę, próbujemy lokować liczby w odpowiednich przez nas tworzonych przestrzeniach tak, by w jakiś sposób poddać je naszej zmysłowości. Czynił to Euklides w księdze VII *Elementów* dla umotywowania działań na liczbach, i – jak wspomnieliśmy – Gauss, który dla budowania przestrzeni, w których mogłyby się znaleźć jego liczby, sięgnął po zbiory. Chociaż pojęcie o liczbie mogłoby zamknąć się w sobie, to jednak liczba stara się być obecna w całej matematyce. Liczba służy matematyce, ale tak samo prawdziwym wydaje się powiedzenie, że liczba się narzuca. Wchłania w siebie wszystko, co współgra z rytmem pierwotnym. Nasz język również ma swój rytm, chociaż nie wiemy, w jaki sposób zazębiający się z rytmem liczby. Są jeszcze inne wbudowane w nas rytmy. Doszukujemy się związku matematyki z muzyką.

Według Fregego liczba to aspekt ilościowy zbioru, zbiór zaś jest składnikiem pierwotnym naszych myśli, wcześniejszym niż liczba, co będzie wielkim sporem filozofów. Tak wysoko nie mierzył zbiorów Gauss, ani jego następca Dedekind. Dwa zbiory reprezentują tę samą liczbę, jeśli można jeden na drugi odwzorować wzajemnie jednoznacznie. Nie odróżnia się tu zbiorów skończonych od nieskończonych. Cantor wzbogacił rysującą się teorię, wskazując na dwa stopnie nieskończoności ilościowej, przeliczalną i nieprzeliczalną. Gdyby był podał na to tylko jeden dowód – geometryczny – mielibyśmy piękną i spokojną teorię zbiorów. Jego drugi dowód – arytmetyczny, zwany przekątniowym – nadał teorii tempo, za którym nie mogła nadążać już myśl. Okazało się, że nie istnieje bariera dla ilościowego aspektu zbioru. Wynika to z pewnej łatwości budowania myślowo zbiorów, jeśli nie istnieje potrzeba znajdowania dla nich reprezentantów odbieranych zmysłowo. Aspekt ilościowy zbioru napotka swoją barierę dopiero w postaci słynnej antynomii Russella. Tej bariery należałoby jednak szukać wcześniej. Jest trudnością pogodzenie aspektu ilościowego zbioru z liczbowym rytmem pierwotnym, który przedłuża się poza potok liczb naturalnych, z własną hierarchią wielkości w znaczeniu tworzącego się tam porządku.

Świat S organizuje się w konteksty złożone z sądów łączonych ze sobą tak, by pozostawały w zgodzie. Zgodność sądów jest wyrazem wzajemnego ich dopasowania, jest tym, co świat S uznaje za swoje wewnętrznie koherentne prawdy. Użyta została liczba mnoga, bo konteksty są od siebie niezależne, nie pretendują do pokrywania całości. Jest więc w matematyce geometria i arytmetyka, ale są też węższe konteksty, jak, na przykład, logarytmy.

Koherentnymi powiązaniami łączymy prawdy jedynie w ustalonych kontekstach. Te są autonomiczne i ich luźna struktura powiązań jest w jakiejś analogii do świata monad Leibniza. Prawdy przekazywane są z jednego ściśle uformowanego kontekstu do drugiego jedynie w formie metafor, wśród których najbardziej znanymi są te, które arytmetyka przenosi do geometrii, na przykład traktując jako liczby odkładane jeden po drugim odcinki. Prawdy przeniesione metaforą do innego kontekstu żyją tu już swoim odrębnym bytem. Ubogacają się swoim nowym nosicielem. Jeśli wracają z powrotem w swoje pierwotne rejony, są już bogatsze o nowe doświadczenie. Największymi metaforami są te, które przenoszą prawdy matematyczne do rzeczywistości.

Prawdy świata S dotyczą jego wewnętrznych powiązań i wewnętrznej harmonii, to jest wspomnianej koherencji, i nie pretendują do statusu prawdy nadrzędnej. Przenoszone do rzeczywistości przez metafory, bywają widziane jako prawdy rzeczywiste. Tam mogą zderzać się z faktami. Jeśli nie uzyskujemy zgodności, modyfikujemy konstrukty świata S. Dlatego nie popełnimy błędu, jeśli nazwiemy matematykę nauką doświadczalną. Doświadczeń dostarczają również metafory przenoszące prawdy z kontekstów do kontekstów, pozwalające na wzajemne korekty prawd. Matematyka rozwija się dzięki ustawicznej wymianie doświadczeń między kontekstami. Ale esencją prawdy pozostają oddzielne jej monady, to jest prawdy tworzone w osobnych kontekstach.

Wprowadzając do naszych rozważań metafizyczność, nie powiedzieliśmy, jak ma się ona do świata S. Stoi ona poza światem S. Nie ingerując w prawdy świata S, poddaje swemu osądowi wspomniane doświadczenia myślowe. Ma większe, szersze pole widzenia i cele niż matematyka.

Fakt nabiera dla świata S znaczenia, jeśli znajdzie dla siebie miejsce w określonym jego kontekście, który faktowi nadaje status istnienia. Nie znamy innego rozumienia istnienia niż znalezienie się koherentnie w określonym kontekście. Nie jest to więc pojęcie absolutne. Może być wiele sposobów istnienia. Liczba $\sqrt{2}$ i przekątnia kwadratu o boku 1 to różne sposoby zaistnienia tego samego zjawiska, którego zaistnienie daje również odpowiedni przekrój Dedekinda. Istnienie nie przekracza kontekstu, w jakim nadaliśmy mu znaczenie.

Zaatakowana nowym faktem konstrukcja myślowa świata S ulega przebudowie, aby móc wchłonąć ów fakt w sposób koherentny. Przebudowa kontekstu kosztuje i już chociażby dlatego świat S nie cieszy się z każdego poszerzenia wiedzy. Stąd nie ma identyfikacji tego, czym żyje świat S, z tym, co potocznie nazywa się nauką. Jest to nie tylko dystans. Bo metafizyka ocenia również wartość prawd. Ocenia je według spełniania przez nie wcześniejszych co do nich oczekiwań.

Nasza metafizyczność nie odrzuca odkryć Cricka i Watsona, ale nie musi, w odróżnieniu od nauki, cieszyć się tymi odkryciami. Nauka nie pyta *cui bono*? Czerpie satysfakcję ze swojej sprawności. A świat S – poprzez naszą metafizyczność – pyta. Prawda – uznajmy, że widzimy ją w tym znaczeniu, o jakim tu mowa – ma dlań nie tylko wartość, ale ma też i znak. Odezwał się Scheller, ale też i Jaspers.

Prawda matematyczna trwa w umyśle, jeśli jest przeżywana. Prawdy matematyczne, te najbardziej oderwane od doznań zewnętrznych, goszczą w umyśle nieraz dosłownie przez chwilę. Słyszało się, że nie zapisane w porę dowody powstałe w Kawiarni Szkockiej bezpowrotnie ginęły. Prawdy matematyczne, nawet zapisane, mogłyby nie odżyć, jeśliby nie były wcielone w nasze doznania zmysłowe i nie były przez dłuższy czas aktywnie przeżywane. Żyją, przekazywane od monady do monady, raczej w postaci rozbłysków niż płomienia. Ale, jak twierdzi Solomon Golomb, jeśli zawitają do nas po raz drugi, będą te same co przedtem.

Płacimy za tę efemeryczną trwałość prawd cenę wysoką, odsuwając się przy ich uzyskiwaniu daleko, jak tylko można, od naszego ich zmysłowego odbioru. Prawdę odbieraną zmysłami zastępujemy wbrew jej prawdziwej naturze prawdą w znaczeniu koherencji logicznej, a wobec tego rodzaju prawdy potrafimy być już chłodni. Stąd słowa Arystotelesa, że matematycy są obojętni wobec treści twierdzenia matematycznego i zgodzą się z przeciwnym, jeśli ono okaże się prawdziwe.

Jeśli chcemy prawdę matematyczną przechować, to tylko w umysłach przeżywających ją jako swoją.
Nie przechowalibyśmy narastającej mnogości jej prawd, jeśliby matematyka – jak chcą niektórzy – była księgą czy też gmachem. Będąc w stałej interakcji z zewnętrzem i innymi prawdami, matematyka utrzymuje przy życiu tylko swoje prawdy czynne. Są wszakże wśród nich i takie, które, osiągając doskonałość, stają się własnością wspólną, klejnotami jej muzeów – jak jeziora Wady, lub ozdobami galerii – jak twierdzenie Morleya. Są nadal przeżywane, chociaż już w wysublimowany sposób, co jest wartością samą w sobie, niewymierzaną żadnym celem. Nie wydaje się, by obca cywilizacja, dziedzicząca po nas księgę, gmach i wspomnianą galerię, była zdolna do ich przejęcia. Prawdy matematyczne giną bezpowrotnie wraz z ich światem S.

Dopóki przedmiotem matematyki były proste figury geometrii i liczby w swych zjawiskowych indywidualnych postaciach, platoński pogląd na wiecznotrwałość matematyki wydawał się niekwestionowalny. Ale wiek dziewiętnasty uwidocznił, jak wiele w matematyce zależy od nas samych. Współbrzmi to ze słowami, które zamieścili Courant i Robbins w znanej książce *Co to jest matematyka?* Brouwer na początku XX wieku zwrócił uwagę na wpływ, jaki na prawdy matematyczne ma nasza logika. Interwencja logiczna pełna jest arbitralnych ustaleń zapełniających luki myślowe. Te mogłyby pozostać niezamknięte, ale logika – czuła na *horror vacui* – zamyka je na użytek doraźny w zdania, które w tej postaci są petryfikowane jako prawdy. Logika nie tworzy kształtu świata S, lecz jest jedynie potrzebą ładu i utrzymania zbudowanych już struktur.
W wielu przypadkach odczuwamy jej wpływ jako hamujący. Zamykając otwarte wątki myślowe, uwalnia nas od mierzenia się z pytaniami, odpowiadając na nie za nas. Zdarza się, że ulegamy i korzystamy z wygodnego prezentu. Zmienilibyśmy zdanie, gdybyśmy umieli znaleźć jakiś zmysł wewnętrzny kierujący naszą logiką.

To nasze zmysły zbudowały bogactwo i żywotność konstrukcji, jaką ustawił naprzeciw światu zewnętrznemu świat S. Jednak w samym charakterze zmysłu jest efemeryczność i gra. Zmysły nas zwodzą, wciągając do gry, mając swoje własne w niej cele. Czy nie zwodzi nas i matematyczność?

Wielką zagadką jest to, że matematyka potwierdza się praktycznie i w przyrodzie. Rządzi się prawami, których z przyrodą nie uzgadnialiśmy. Dlatego gubimy się, gdy wychodzimy z gotową matematyką poza jej bramy. Mawiał profesor Bronisław Knaster: matematyka nauczy nas, jak mnożyć i jak dzielić, ale nie nauczy nas, kiedy mnożyć, a kiedy dzielić. Matematyk w tak zwanych zastosowaniach jest figurą raczej niezgrabną, jeśli pominąć nieliczne przypadki.

W zrozumieniu jej natury powinna nas wspomóc, jak sądzimy, wiedza o organizmach żywych. Z obawą jednak sięgamy ku tej nieznanej wiedzy, spodziewając się usłyszeć prawdy, do których odbioru nie jesteśmy przygotowani. Rajskie drzewo dobrego i złego i skała Prometeusza stale towarzyszą jako przestroga. Ten lęk przed wiedzą towarzyszy ludzkości od samego jej zarania. Matematyka nie stwarza tego rodzaju lęku bezpośrednio, ale metafory z niej idące mogą sięgać daleko.

Z samą matematyką łączy się obawa innego rodzaju. Pomyślmy, że nauki szczegółowe wytłumaczyłyby nam, jak powstają w naszym umyśle pojęcia. Zniknęłaby cała poetyczność matematyki. Czy chcielibyśmy nadal się taką matematyką zajmować? Zostawilibyśmy ją innym. Ale może dotyczyć to nie tylko matematyki. Rozwijamy się dzięki mitologii, która chroni nieznane.

O matematyce

Jest w matematyce żywioł, jakim jest liczba z jej rytmem od naszych myśli niezależnym, jest tło, jakie dają mu zbiory i spostrzeżeniowa geometria. Jest wreszcie *calculus* – analiza matematyczna – i kształtująca się nim intuicja. Personifikujemy te wszystkie rzeczy, bo tylko takie może być ich rozumienie. Nasza pozycja to zawsze jakiś ustalony kontekst. Nie ogarniamy całości, chociaż ona gdzieś w dali się rysuje.

O arytmetyce

Arytmetyka jest umiejętnością posługiwania się liczbami. Nie wiemy, czym są, może nawet nie wiemy, czemu służą, ale często wiemy jak. Nie wydaje się jednak, by ta umiejętność brała się z samego rytmu indukcji. Nie mamy pewności, by sam rytm indukcji był zainteresowany dodawaniem i mnożeniem liczb.

Widzimy to w postępowaniu Euklidesa, który w księdze VII *Elementów* dla wprowadzenia tych działań przenosi liczby metaforą do geometrii, interpretując je jako zwielokrotnienia ustalonego odcinka. Pojęcie pola motywuje mu mnożenie. Nie decyduje się na to, co my teraz robimy w kursach arytmetyki, by określić te działania indukcyjnie. Ale również my teraz staramy się mieć przeważnie liczby we wcieleniach. Zwrot zapożyczamy od Mosesa Mendelssohna, filozofa końca XVIII wieku. Poprzez te wcielenia liczba rozwija się. Z geometrii nabywa cech ilościowych. Powstają motywacje dla ułamków. W zetknięciu się z fizycznym continuum powstaje idea liczby ciągłej. W geometrii tak zwane wielkości ewoluują ku nabieraniu cech liczb. Byłoby uproszczeniem umieszczać ten proces w jakimś okresie historycznym. Euklides jest przykładem symbolicznym.

Pojedyncze liczby napotykamy niezależne od rytmu pierwotnego. Odbierane są one zmysłowo we wspomnianych wcieleniach w postaci wzorców geometrycznych lub jako zmysłowo odczuwane ilości. Jest zatem pewna trudność w jednolitym ujęciu liczby. Bo nie potrzebujemy rytmu indukcji, by napotkać liczbę 3. Liczby 13 i 7, jako bardziej wyraziste, poznajemy wcześniej niż liczbę 6, która pojawia się nawet później niż biblijne dziesięć tysięcy. W *Rękopisie znalezionym w Saragossie* Jan Potocki, słowami Velasqueza, przekonuje nas, że liczby natury figuralnej nieobce są naszym braciom mniejszym. Wydaje się, że poznajemy je zmysłem bliskim temu, którym dane są nam figury geometrii.

Można się zastanawiać, skąd tak powolny historycznie rozwój naszego kontaktu z liczbą odbieraną zmysłowo. Skąd biorą się nasze trudności z małymi liczbami? Skąd trudności przy wykonaniu kilku kroków czystej logiki? Matematykom – a może nie tylko – znane są wyglądające na paradoksalne jakieś dysproporcje w efektywności naszego myślenia. Nawet dobrzy matematycy wpadają w kłopoty na wykładzie, kiedy trzeba przeliczyć ułamki lub przeprowadzić logiczny dowód deltowo-epsilonowy, mimo że bez trudu przeprowadzają rozumowania wysokiego szczebla, a pamiętajmy o geniuszach teorii liczb.

Jest pewna asymetria właściwa arytmetyce. Rytm pierwotny sprzyja mnożeniu. Dla określenia mnożenia niekonieczne jest wcześniejsze umotywowanie w dodawaniu. Rytm indukcji powiela czynniki w postaci liczb pierwszych. Wcześniej indukcja przygotowała po temu grunt w postaci rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Świadomość jest w dużym stopniu zwolniona z obowiązku śledzenia znaczenia rezultatu działania. Takiego prezentu nie dostało dodawanie. Pozostaje w liczbach małych, gdzie czynności sterowane są stale czuwającą świadomością. Ta asymetria dotyczy nie tylko arytmetyki. W arytmetyce objawia się wyodrębnieniem w teorii liczb jej addytywnej części, w której napotykamy hipotezę Goldbacha i liczby pierwsze bliźniacze.

O geometrii

Geometria jest matematyką zmysłu wzroku. Pewne proste prawdy dyktowane przez ten zmysł – dopełnione przez zmysł dotyku – stanowią osnowę, na której Euklides oparł swoje *Elementy*. W symbiozie z figurami żyją w niej liczby – te małe, o których była mowa – pojawiające się w geometrii trójkąta i wielokątów na równych z nimi prawach. Wiele spostrzeżeń daje się odczytać w pierwszych fragmentach oglądu. Są prawdy geometryczne naoczne i te przyjmuje się jako pewniki. Zmysł widzenia jest szybki i podsuwa wielką rozmaitość wrażeń, które narzucają się zbyt natarczywie. Dlatego nasza matematyczność jest ostrożna. Geometria nie w pełni dowierza zmysłowi widzenia, nawet razem wziąwszy z bardziej wiarygodnym zmysłem dotyku. Selekcjonuje, a wreszcie dopuszcza do udziału osąd, w rezultacie logikę, która upewnia nas w naszych przekonaniach wybiegających poza już zaakceptowane prawdy. Mogło nas nieraz dziwić, że w czasie nauki szkolnej dowody spotykaliśmy przede wszystkim w geometrii, bo w arytmetyce prawdy są zadziwiająco pewne i osąd nie ma tu znaczenia, czasem tylko coś trzeba sprawdzać. Dowód geometryczny polega na wykonywaniu czynności myślowych niesprzecznych z logiką i akceptowanych przez doświadczenia stolarza i kreślarza, w których przeważa dotyk.

Wiele prawd zawartych w *Elementach* mieści się w tak zwanych definicjach, które są w istocie objaśnieniami pojęć, często próbami ich rozumienia, a czasem przestrogami przed nieostrożnym ich widzeniem. Bo jak inaczej traktować takie objaśnienie, a jednocześnie ostrzeżenie, jakim jest „definicja" linii, która ma być *długością bez szerokości*? Wskazuje to nam tylko, że to, w czym spostrzeżemy szerokość, nie jest linią, a jeśli nie widzimy w czymś długości, to nie traktujemy tego jako linii. *Elementy* stanowią poszukiwanie logicznych podstaw dla sumy tego, co znali wcześniej Tales, Pitagorejczycy i Hipokrates z Chios, a z późniejszych Eudoksos. Pewniki geometrii widzimy nie jako coś, z czego geometria wyrasta, lecz jako wytłumaczenie twierdzeń.

Są w geometrii Greków wielkości odcinków, kątów i pól, które się tylko porównuje, każde w swoim rodzaju. Dla Greków nie są liczbami. Staną się liczbami w dalekiej przyszłości.

Pojęcie przestrzeni pojawia się u Euklidesa jakby na obrzeżu jego rozważań. Interesowały go przedmioty geometryczne, jakimi były figury. Ale filozofom zawsze brakowało owego pojemnika, w którym coś, co jest pomyślane, jest zanurzone. Również świat naszych myśli domaga się zamknięcia każdej kolekcji rzeczy w coś. Przestrzeń jest potrzebą naszej myśli i można się zastanawiać, czy – podobnie jak liczba – pojęcie o niej nie jest wdrukowane w nas *a priori*. Nie idziemy aż tak daleko, bo pojęcia *a priori* mogą mieć swoje gradacje. W matematyce pojęcie przestrzeni kształtowało się powoli i możemy to śledzić historycznie. Jako pojęcie filozoficzne jest ono niezależne od świata fizycznego. Jego potrzebę odczuwa nasza myśl, która poszukuje zamknięć dla swoich konstrukcji.

O zmienności

Matematyka Starożytnych była według Arystotelesa nauką o bytach nieruchomych. Było to samoograniczenie wymuszone przez paraliżującą myśl aporię Zenona o strzale, blokującej rozumienie ruchu. Tymczasem ruch i zmienność są istotą zjawisk fizycznych. Arystoteles poświęcił cały rozdział w *Fizyce* wzrostowi i zanikowi. Sytuacje, gdzie obserwujemy zmianę, są od siebie odległe. Może to być droga narastająca w czasie, nasilenie barwy czy też tempo przyboru wody w strumieniu. Odczuwanie tych zjawisk nie jest tak oczywiste jak postrzeganie wzrokowe. Natężenie siły, wyczucie natężenia barwy, poczucie narastania prędkości dochodzą do nas od jakiegoś zespołu zmysłów, nie bezpośrednio, lecz w jakieś utemperowanej całości. Dlatego to, być może, uchwycenie praw rządzących zmianą, jej natężenie i szybkość, pozostawało tak długo przedmiotem niepewnych sformułowań.

Ideę wspólnego ujęcia matematycznego zmienności podjęli filozofowie scholastyczni XIV wieku. Calculatores z Merton College z Oksfordu i filozofowie z Paryża wyszli od spostrzeżenia, że to, co bezpośrednio podlega obserwacji, to nie wielkość zmiany, lecz jej intensywność. Nie podlega obserwacji ilość wody w strumieniu, lecz intensywność jej przepływu. Intensywność zmiany, obserwowana w określonym zakresie, determinuje zmianę ilościowo. Jednym z przykładów, który brano pod uwagę, była intensywność łaski Bożej spływającej na człowieka, która się w nim nagromadza ilościowo, sumarycznie, na sposób, który Newton i Leibniz nazwali później całką. Jest też intensywność siły wtłaczanej w poruszające się ciało, która determinuje jego impet – a więc prędkość. Jeśli więc siła działająca na ciało jest – tak jak przy spadku swobodnym – niezmienna w czasie, to prędkość wzrasta w czasie jednostajnie. Scholastycy zawierzyli wdrukowanemu w nas zmysłowi pozwalającemu nam odczuwać stopień natężenia oddziaływań, zmysłowi wprawdzie nieostremu, który jednak nas nie myli. Sformułowali prawo swobodnego spadku, które później Galileusz sprawdzał doświadczalnie.

Pełne włączenie idei czternastowiecznej w zarysowującą się już konstrukcję matematyczną zawdzięczamy Newtonowi, chociaż pominęliśmy prekursorów: Keplera, Cavalleriego i Torricellego, a przede wszystkim Arystotelesa, bo to na gruncie jego *Fizyki* powstawał opisywany tu nowy dział matematyki – analiza matematyczna zwana na Wyspach calculusem – którą Newton traktował jako poszerzenie geometrii Euklidesa o naukę o ruchu.

Matematyka Scholastyków i Newtona zaczerpnęła jeszcze raz pełną garścią z dostępnego nam zmysłami świata. Był to skok w rozwoju, ale – wróćmy do naszej mitologii – skok w obrębie pojęć matematyki Dnia Szóstego. Intensywność zmiany ma jakieś podobieństwo do liczbowego rytmu Dnia Pierwszego. Jest jakby tego rytmu ciągłym wypełnieniem. Podobnie jak rytm arytmetyczny, ma zastanawiającą rozmaitość wcieleń, nadając pojęciom matematycznym nowe, szybsze tempo rozwoju. Nie trzeba będzie nawet stu lat, aby prosty calculus przeszedł w równania struny u Eulera. Przypomnijmy, że to właśnie intensywność – wielkość, która była tak trudna do określenia – jest tym, co podlega bezpośrednio obserwacji, a także pomiarowi. Tę prawdę wyraża nam równanie różniczkowe, które z danych związków między intensywnościami obiecuje nam odtworzyć związki między samymi wielkościami, które bezpośredniej obserwacji nie są dostępne.

W swoich początkach analiza była wolna od wpływu arytmetycznego. Było to jeszcze wtedy, kiedy Newton formułował prawa dynamiki i poddawał im prawa Keplera rządzące ruchem planet, a nawet jeszcze wtedy, kiedy Jan Bernoulli wyjaśniał problem brachistochrony, a Euler problem struny. Motywacje analizy wywodzą się z szerszego zakresu doznań niż te, które wystarczały geometrii. Włącza się zmysł poczucia czasu, natężenia siły i poczucia nagromadzania się wielkości, na wiele sposobów wcielające się w sytuacje matematyczne. Metafizyczność tych motywacji odczuwamy nieostro, ale w sumie dużo silniej i pewniej niż w zakresie klasycznych motywacji geometrycznych, których źródło jest niemal bezpośrednie.

Motywacje analizy najczęściej nie są naszymi bezpośrednimi przekonaniami wynikającymi z własnego doświadczenia, lecz zdają się raczej wynikiem wdrukowania ich w nas – używając zwrotu Konrada Lorenza – we wczesnych stadiach naszej ewolucji, chociaż może nie chodzi tu o Dzień Pierwszy. Słowacki w *Genesis z ducha* dziękuje mrówce, której doświadczeniem się kieruje.

Calculus bardziej niż inne dyscypliny uwidacznia istotę intuicji. W istocie, jeśli matematyk mówi o intuicji, to ma na myśli calculus i to wszystko, co na nim wyrosło. Intuicje, które leżą u podstaw geometrii Euklidesa, są zbyt proste, by uwidocznić swoje role. Przewidywania są tu łatwo i szybko potwierdzane zmysłowo, a była okazja już powiedzieć, że bywają i bałamutne. Kontakt z liczbą nie wychodzi poza doznania kombinatoryczne. Zmysł kontrolujący calculus jest głębiej i szerzej w nas skryty. Chociaż natężenie siły, bieg czasu i prędkość chwilowa są nieostro poddane naszemu oglądowi, to jednak zawierzamy idącym od nich sygnałom. Intuicje leżące u podstaw calculusu przetrzymały atak metod mnogościowych przełomu poprzednich dwu stuleci, przetwarzając ślady pozornie przegranych potyczek w dzieła sztuki na zawsze zdobiące matematykę.

Intuicje, które doprowadziły do odkrycia calculusu, widzimy jako sumaryczne doświadczenie przedmatematyczne, jako całkę z doświadczeń przedświadomości, nie tylko naszej, lecz całego biegu ewolucji. Bywa, że nie ufamy intuicji, a Pascal dopowiadał, że to dlatego, iż aż nazbyt często bywa bezbłędna. Galileusz nie wierzył intuicjom i sprawdzał. Podobnie, nie wierzył intuicyjnie rozumianym aksjomatom geometrii Kartezjusz, zastępując metodę Euklidesa swoją arytmetyczną metodą współrzędnych. Również Leibniz, rozwijając swój rodzaj analizy nie szedł drogą intuicji newtonowskiej. Szukano pewności, tymczasem nie w pewności jest sens intuicji, lecz w przekonaniach, w których się lokuje i nagromadza.

Przyrodę widzimy matematycznie. Inaczej nie potrafimy. Ale kiedy mówiliśmy o świecie S i wbudowanej weń konstrukcji pojęć, nie dzieliliśmy jej na matematyczną i niematematyczną. Dopiero w którymś momencie pojawiła się matematyka, którą zazwyczaj wyodrębnia się spośród ogółu dociekań ścisłością. Ale nierygorystyczne fazy rozumowań są również matematyką, chociaż woleliśmy je nazwać matematycznością. Nie wykluczamy zatem, że wszystko, co ze świata odbieramy, jest matematyczne, przynajmniej potencjalnie. To, że w dostępnym nam zakresie zjawisk przyroda jest matematyczna, wydaje się tautologią, bo niczym innym nie może być. Ale to, że jakieś zjawisko pozostaje poza naszą matematyką, nie znaczy, że jest niematematyczne. Ale odkrywana w nim matematyczność byłaby jednak nasza. Sukces jego matematyzacji byłby umiarkowany, bo do nas należą jedynie same matematyczne detale, takie jak kwadrat w prawie grawitacji. Prawo dał Stwórca, który nie musiał kwadratu zawczasu widzieć, bo bierze się on z dopasowania prawa do sposobu naszego odbioru. Nic nie ujmiemy, a nawet przeciwnie – dodamy powagi Stwórcy, jeśli nie będziemy wymagać, by wraz z nami wypracowywał formuły matematyczne.

Fakty nabierają życia dopiero dzięki naszemu nimi zainteresowaniu. Ich zaistnienie jest niemożliwe, jeśli przedtem nie zostały pomyślane. Jak dużą część natury człowiek ożywił, włączając ją do swych struktur metafizycznych? Tylko tę część natury możemy włączyć do nauki, poddając ją naszej matematyce, która z kolei, dzięki kontaktowi z naturą sama się rozwija.

Pozostają jednak całe obszary zjawisk przyrody, do których z naszą matematyką nie zaglądamy. To dziwne, że geometrią Euklidesa można iść w dowolnie dalekie regiony kosmiczne, uzyskując nadal sensowny opis zjawisk. Ale już Riemann zauważył, że użyteczność naszej geometrii zatraca się, jeśli przechodzimy ku mikroskali. Naiwne przekonania o symetrii, w jakiej pozostają do siebie nieskończoność i zanik ku zeru, trzeba odrzucić.

Także nasze środki matematyczne nie wnikają w zjawiska przyrody jednakowo daleko. Arytmetyczność – poprzez rozbudowę jej pojęć – zdaje się nie mieć ograniczeń. Przyroda jej ulega, daje się eksploatować, ale nie odkrywa jej wszakże swoich głębszych tajemnic. Właściwe dla odkrywania jej tajników są miękkie wzorce matematyczne znane z analizy matematycznej – dawnego calculusu – i geometrii. Przyroda – ta nam bliska – ma je w sobie i prawdy uzyskiwane tymi miękkimi metodami poddają się naszemu rozumieniu. Odkryliśmy je w wieku siedemnastym, choć nie zapominajmy o scholastycznych prekursorach, a przede wszystkim o Arystotelesie, który wymógł kierunek poszukiwań. Otworzyły się przed nami nieznane dotąd możliwości przyrody. Nie dziwmy się, że w niewiele więcej niż w trzysta lat zmieniło się nasze otoczenie.
To matematyka je zmieniła, nie przewidując skutków, bo dopuściliśmy do udziału szybkie algorytmy, przez co odkryć dotykamy palcem, nie lokując ich w myśli.

Dla matematyków ważny jest kwiat matematyki, a ten jest ulokowany w matematyce słabej, to jest tej, którą sami myślowo wypracowujemy. *Dowodzę coraz słabszych twierdzeń – ale coraz bardziej mi się one podobają* – to słowa matematyka, który po latach uwolnił się od przymusu arytmetycznego. Ale ta „słaba” matematyka musi wyjść dla swoich odkryć poza świat ściśle matematyczny. Matematyka przetworzona metafizycznie, przy pełnym udziale naszej świadomości, jest tą, dla której jesteśmy matematykami.

Realiści matematyczni są zainteresowani tak zwanymi przedmiotami matematycznymi. Te istnieją jedynie w nas. Fizycznie są niedostępne. Prawdy matematyczne są prawdami naszego świata S i znikną razem z nami, a żadna inna cywilizacja nie przejmie ich od nas, jeśli nie jest zainteresowana nimi, znajdując w świecie swoich myśli i w otaczającym ją świecie inne upodobania, przez co do bezpośredniego ich przejęcia będzie niezdolna. Podobnie jak monada jest zdolna do przejęcia jedynie określonego sygnału rozbudzającego jej interior. Potrzebny jest kod i tego właśnie będzie brak. Dorobek upadłych cywilizacji gromadzony w muzeach, nie wyłączając ich dorobku metafizycznego i matematycznego, przepadnie bezpowrotnie wraz z upadłą cywilizacją. Ale katastrofą, z którą się w istocie już spotykamy, jest przejęcie kodu przez pewną część owej upadającej cywilizacji, która nie rozumie wszystkich skutków naciśnięcia na guzik, lub zna jedynie skutki sobie użyteczne.

O zbiorach

Zbiory do matematyki wprowadził Gauss. Nie wystarczała już geometria dla znajdowania zmysłowo dostępnych wcieleń jego konstrukcji algebraicznych. Wygodna po temu była materia bardziej miękka, jaką dawał zbiór, obecny również w użyciu jako *façon de parler*. Abstrakt algebraiczny nabierał – po wcieleniu go w zbiór – cech quasigeometrycznych. Nie inaczej postępował Euklides, wcielając liczbę w geometrię, aby ją objaśnić.

Teorię zbiorów – nazywaną u nas teorią mnogości – stworzył Cantor, co należy rozumieć tak, że upomniał się o autonomię pojęcia zbioru. Zbiory mają być rozważane w oderwaniu od ról, jakie pełnią. Taki status w matematyce miała dotąd jedynie liczba. Tak pomyślany zbiór czysty – sam w sobie – nie uczestniczy w naszej zmysłowości.

Z pojęciem zbioru spotykali się już Grecy, rozważając *continuum*, jakim jest prosta złożona z punktów. Punkty stanowią jego budulec. W ten sposób – materialistycznie – widział zbiory Cantor. Tymczasem dla Dedekinda, który był w tym kontynuatorem Gaussa, elementy zbioru były nie więcej niż znakami położenia. Dedekind nie rozpatruje zbiorów samych w sobie. Zbiór jest czymś, co służy. Jest tą składową aprioryczności, która zbliża nas ku rozumieniu. Także ku rozumieniu liczby, tajemniczego zjawiska, jakim ona była w jego *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Przekrój Dedekinda z jego *Stetigkeit und irrationale Zahlen* objaśniał miejsce znanej mu wcześniej liczby $\sqrt{2}$.

Jest wielka różnica w tych dwóch sposobach widzenia zbiorów. Zarówno Cator, jak i Dedekind są twórcami pojęcia liczby rzeczywistej. Ale, według Dedekinda, objaśnia on jedynie dawniej znane proporcje Eudoksosa. Cantor liczby rzeczywiste buduje.

Jak pisze Alexander Wittenberg w pełnej gruntownych przemyśleń książce *Von Denken in Begriffen* (1975), zbiory – tak zwane dowolne – widzimy zawsze w jakiejś fizyczności, na przykład jako zbiór punktów prostej czy też zbiór piasczynek, które niesie wiatr, gromadę ptactwa. Jedynym zbiorem, który pojawia się w naszych myślach bez udziału doznań zmysłowych, jest zbiór liczb naturalnych dany nam razem z całą swoją dynamiką liczbowego rytmu pierwotnego. Ten rytm ma przedłużenie w pozaskończość i nadal ma charakter liczbowy. Cantor, będąc na progu nieskończoności aktualnej ω, postawił kroki $\omega + 1$, $\omega + 2$ i dalsze. Przedłużał znaną skalę. Miał po temu pewne motywacje w postaci zbiorów wyjątkowości szeregu trygonometrycznego, ale ta motywacja nie pojawia się w jego *Memoire Nr* 5, który był jego manifestem matematyki wyzwolonej.

Tymczasem kroki na tworzonej skali są wymuszone pewnym automatyzmem naszego myślenia, który dostajemy w apriorycznym podarunku jako porządek, który nazwamy dobrym. Pojawia się przykre poczucie niemożliwości powiedzenia stop.

Uważa się dobry porządek za wymaganie dodatkowe. Nic błędniejszego! Znaczyłoby to bowiem, że dla uzyskania dobrego porządku wystarczyłoby najpierw mieć porządek jakikolwiek, a potem go ulepszyć. Tymczasem, jak zauważa Wittenberg, nie umiemy zrobić tego jakiegokolwiek porządku samą konstrukcją myślową. Zauważył kiedyś profesor Jan Mikusiński, że jeśli używając zasady wyboru, budujemy w zbiorze częściowo uporządkowanym łańcuch nieprzedłużalny (lemat Zorna), to bez naszych o to starań dostajemy łańcuch dobrze uporządkowany. Wymaganie zwykłego liniowego porządku jest logicznie słabsze, ale matematyka, ta apriorycznie w nas wbudowana, nie obdarzyła nas żadnym przykładem innym niż dobry porządek.

Według deklaracji Cantora z jego *Mannigfaltigkeiten* zbiór to *złożona z mających indywidualność elementów całość M*

zespolona zgodnie z naszym oglądem i przemyśleniem. W zbiorze ma więc tkwić idea, która wielość formuje w jedność, aby zadośćuczynić jakiejś potrzebie naszego umysłu. Ale w materialnie widzianej wielości nie zawsze daje się rozpoznać ideę. Można ominąć tę trudność, uznając za ideę już samo znalezienie się w kolekcji. Teoria mnogości – ta, którą mamy – zapomniała o deklaracji Cantora i dopuszcza to tautologiczne rozumienie zbioru, pozbawiając się już na samym wstępie filozoficznych ambicji. W teorii stworzonej przez Cantora, a przejętej przez Hilberta, zbiór w znaczeniu idei pozostał nigdy nie spełnioną obietnicą.

Utrzymanie obietnicy Cantora było trudne. Znamy sytuacje, kiedy brane z osobna w swoich kontekstach zbiory A i B reprezentują określone idee, a idei reprezentującej ich sumę nie potrafimy znaleźć. Każdy z krajów Europy reprezentuje określoną ideę, która łączy w jedność jego obywateli. Szukając wspólnej idei dla ich sumy, popadamy w trudność, zadowalając się w końcu rozwiązaniem, że może to być, na przykład, wspólny zwyczaj zachowania się przy stole.

Teoria mnogości miała być dla Hilberta tym, co połączy matematykę w całość. Dla tego celu zaczęto formować tę całość na sposób algebraiczny. Dołączano do akceptowanych już zbiorów ich sumy. Same kolekcje zbiorów uznaje się za zbiory, a potem tworzy się ich produkty, wyróżniając w nich podzbiory mające charakter dawniej znanych funkcji. Ten czysto formalny tryb rozbudowywania systemu wykracza poza to, co mógłby kontrolować zmysł matematyczny. Jedynymi niekwestionowanymi elementami tego systemu jest skala liczb porządkowych Cantora.

Liczebność zbioru będzie jednym z głównych zainteresowań Cantora. Ten ilościowy aspekt zbioru, rozciągnięty na zbiory nieskończone, stanie się najbardziej kłopotliwą częścią teorii. Bo oto pojawia się jako zbiór fizyczne *continuum*. Ciągłość jego uporządkowania pozwala na dowód, że ma ono nieprzeliczalnie wiele punktów. Dowiódł tego Cantor w jednej ze swoich pierwszych prac. Ale potem podał tak zwany drugi dowód – przekątniowy. Nie kwestionujemy tego dowodu, lecz odnotowujemy zadziwiającą łatwość, z jaką zaklęciami mnogościowymi, mając zbiór liczebności m, powołuje się do istnienia zbiór o liczebności większej. Powstaje skala zbiorów niczym nieograniczonych co do liczebności. Zaistnienie tej skali jest wynikiem jakiegoś, jeszcze jednego wartego zbadania, automatyzmu myślowego. Mamy tu do czynienia z automatyzmem innym niż ten, który prowadzi do zaistnienia skali liczb porządkowych. Wydaje się on być wynikiem jakiejś myślowej zasady bezwładności.

Trudności wewnętrzne

Świat S dozwala, by „myśli myślały się same”. Kiedy zostaje sam ze swoimi myślami, staje przed pytaniami, które powstają w wyniku wspomnianej myślowej swobody. Myśl deformuje myśl myślaną. Aby tego uniknąć, próbujemy traktować myśli podlegające naszemu oglądowi jako zjawiska zewnętrzne. Ale jak rozpoznać, że mamy do czynienia z przedmiotem tego uzewnętrznionego świata, czy też nadal jest on jedynie pomyślany? Nie miała tego kłopotu matematyka liczb i figur, a nawet matematyka calculusu, prowadzona wbudowanymi w nas intuicjami. Nie mamy też kłopotu z arytmetycznością, ale to dlatego, że jej procedury przechodzą obok naszych myśli. Inaczej jest ze zbiorami, które są tłem dla myśli. Dwie składowe naszego aprioryzmu – liczba i zbiór – pełnią niejednakowe role w naszym świecie S.

Nie musieliśmy do jakiegoś czasu myśleć w matematyce o wszystkim. Spotykali się z tą trudnością filozofowie w dyskusjach o praprzyczynie i omnipotencji. Była to burza, która nie sięgała jeszcze wtedy matematyki. Dosięgła matematyki, kiedy ta wyszła poza obiekty postrzegane ku obiektom czysto myślowym, mającym niespotykaną dotąd łatwość rozbudowywania się poza kontrolowane refleksją zakresy. Matematycy mówią o wszystkim jedynie w obrębie ustalonego zakresu. Jeśli się tego nie powie i dozwolimy na swobodny bieg myśli, to wszystko przestaje być wszystkim, bo można zawsze dołączyć myśl o tym wszystkim. Są to rejony myśli właściwe filozofii. Matematyka się przed tym broni, zamykając się w kontrolowanych myślą kontekstach.

Antynomialność jest immanentną cechą świata S, w której myśl może być myślą o myśli, nie wykluczając, że o samej sobie. Sam fundament matematyki, jakim jest liczba i towarzyszący jej zbiór, wyrasta na antynomialności, chociaż liczbie, jak wspominaliśmy, to nie szkodzi, bo jest poza refleksją myślową. Według Jana Potockiego w świecie istot żyjących jedynie człowiekowi dana jest zdolność myślenia o własnych myślach. Z tym kłopotliwym prezentem musimy sobie dać radę. Polega to na posługiwaniu się ze zrozumieniem abstrakcją, na niewychodzeniu z formalizmami poza ich naturalne pole, na niezadawaniu pewnych pytań, nad czym czuwa nasza metafizyka. Powinniśmy się nauczyć żyć z antynomialnością, która zagląda nam w oczy przy każdym wyjściu poza kontekst danej dyscypliny matematycznej i przy każdym wyjściu w zastosowania.

Zjawisko antynomialności pojawia się nieuchronnie przy zamknięciu się we własnych myślach. Nie pojawia się w dialogu, gdzie antynomialności unikamy, przerzucając myśl o własnej myśli na rozmówcę. Dopiero w odbiorze sygnałów od innych świat S jest zdolny do oceny, bo odniesiona jest ona do rzeczy zewnętrznej. To od tych innych się uczymy, odbierając od nich wiedzę w sposób krytyczny. Karmi nas środowisko. R.L. Wilder w znanym odczycie (Kongres 1950) mówi o podłożu kulturowym. Konrad Lorenz, wnikliwy obserwator ewolucji, jest zdania, że to, co nam daje otoczenie cywilizacyjne, przeważa nad tym, co dziedziczymy biologicznie.

Jak to się razem trzyma?

Zwrot *co to jest matematyka?* jest nowy, bo dawni matematycy tego pytania nie zadawali. Teraz spotyka się je w tytułach książek.

Nie ma czegoś takiego jak całość matematyki. Mamy nauki matematyczne i o matematyce rzadko mówimy jako o nauce. Od nauk wymagamy, by miały przedmiot badań i nauki matematyczne go mają. Tymczasem matematyka sięga dalekimi skokami ku problemom, które sprawiły, że jest zbiorem niepowiązanych ze sobą enklaw. Może wyrastać z każdego miejca, a często wyrasta w miejscach już przedtem matematycznych. Jest poza tym czymś dla nas wewnętrznym. W matematyce są siły konkurujące ze sobą. Jest wiele sił wzajemnie się niszczących. Daleko posunięta arytmetyczność potrafi zniszczyć nawet liczbę w jej naturalnej postaci.

Daleką wizją matematyki mógłby być kształt. Bardziej matematycznym zwrotem byłby wzorzec. Te wzorce są czymś trwałym. Pozostają jako zdobycz cywilizacji, nawet gdy samej matematyce już nie służą. Z drugiej zaś strony tworzy się wokół badań matematycznych emanacja pojęć ogólnych.

Nie wiemy, co sprzyja odkryciom matematycznym. Wydają sprzyjać się im wielkie – nawet katastroficzne – wydarzenia, które wypłaszają matematyczne lęki, których sama matematyka ma niemało. Odblokowują się myśli.
Nie sprzyja matematyce zastój cywilizacyjny. Nie trzeba też płoszyć rozbłysku rozumienia matematycznego wymaganiem tłumaczenia się z tego, w jaki sposób się w nas zjawiło. Twierdzenia pojawiają się wcześniej niż ich dowody, które mają być wyjaśniające. Niebezpieczne są dla matematyki twierdzenia, które weszły do niej jedynie dlatego, że mają dowód. Tak bywa w partiach matematyki, w których myśl nie natrafia na opór. Pojawiająca się w tych najwyższych partiach twórczość oceniana bywa krańcowo różnie.
Jest twórczość, która nie zna znaku „stop”. Są sztuki wyzwolone rozwijające się *in vacuum*.

Ma się wrażenie, że matematyka wzięła za dużo na siebie. Chciała odpowiadać na każde pytanie, być sługą wszystkich nauk, rozpraszając swoje siły we wszelkich kierunkach, w które wciągał ją swymi problemami otaczający świat. Na naszych oczach padły największe jej stuletnie problemy, a natężenie potoku rezultatów matematycznych przewyższa wszystko to, co w przeszłości. Ale czy można je porównać ze spektakularnymi osiągnięciami kosmologii, fizyki i biologii, którym patronowały rzesze noblistów, a o których pełno w ilustrowanych pismach? Rozstrzygnięcia matematyczne padają samotnie. Kto spróbuje choćby w przybliżeniu opisać drogę ich odkryć? Jeśli zapytamy, co dały matematyce, to – wahamy się to wypowiedzieć – słyszy się, że po ich rozstrzygnięciu matematyka stała się uboższa. Inne nauki nie znają tego paradoksu.

Utrzymujące się obecnie natężenie potoku odkryć matematycznych zawdzięczamy nie do końca jeszcze wykorzystanemu zasobowi środków i problemom dawniej postawionym. Nie myślimy, by ten zasób środków i problemów – chociaż wyczerpywalny – został w ciągu bliskich pokoleń wyczerpany. Pokłady, z których matematyka czerpie, zdają się wyczerpywać, tak jak wyczerpują się kopaliny.

Ale czy domaganie się stałego rozwoju matematyki nie jest objawem jakiejś obsesji? Dlaczego tak nam na matematyce zależy? Czy na twierdzeniach, które – gdy zyskają dowód – zyskują status szacownych przedmiotów kolekcji?
Czy chodzi może raczej o utrzymanie napięcia myślowego, tego niepokoju, który towarzyszy pytaniu matematycznemu. Niepokój matematyczny – jego natężenie – daje nam poczucie żywotności myślowej.

Ale jeśli ktoś nas zapyta o kierunek poszukiwań matematycznych, nie odpowiemy. Nie spodziewa się wiele po matematyce przyrodoznawstwo, a słowa te wzięte są z Marka Kaca. Filozof, który według Arystotelesa ma wyręczać matematyków w wyborze drogi, nie istnieje.

Coś wszakże powinno matematyką kierować. Schodzące ze sceny pokolenie, widząc obecny nieukierunkowany rozwój matematyki, zapytuje, czy nie może się ona obrócić ku czemuś, czego nie chcielibyśmy widzieć jako matematyczności. Ale już Filozof przestrzegał, że pewne rzeczy trzeba pozostawić jako niematematyczne. Także dlatego, że w wielu z nich nie znajdziemy dawnego kolorytu metafizyczności. Wiele nowych dyscyplin matematycznych widzimy już jako gorszego gatunku. Nie ma w nich dawnej poetyczności, chociaż pocieszmy się, że i w muzyce tak się dzieje. Nasila się trend arytmetyzacyjny i algebraizujący. Bo można zapytać, czy rozstrzygnięta została hipoteza Poincarégo, czy też rozwiązany został problem arytmetyczny, do którego została sprowadzona?

Nauki przyrodnicze przestały być hojne w problemy.
To dzięki nim matematyka rozszerzała się o nowe pola badań i rozwijała sama siebie. Nie zaspokaja tej potrzeby krańcowo zmatematyzowana fizyka, która sięga po rzeczy matematycznie gotowe, przez co jej problemy są w większości wtórnymi problemami matematycznymi. Niezależny od matematyki jej wgląd w mikroświat mógłby poszerzyć matematykę, ale tak się nie dzieje.

Nauki przyrodnicze w swoim szalonym rozwoju występują ze swoich brzegów, nie wiedząc, ku czemu idą. Matematycy również nie potrafią odpowiedzieć na pytanie, czego od matematyki chcą. Sama matematyka coraz mniej zresztą się liczy. Nie liczy na matematykę biologia. Odetnie się wkrótce od wpływów matematycznych fizyka. Zresztą, jak się obserwuje, te nauki korzystają już jedynie z kodów matematycznych. Więc czy nie pozwolić tym naukom na samodzielny byt? Czy nadal mamy uczestniczyć z nimi – nie oszczędzajmy słów – w barbarzyńskim wyścigu po fakty? Spłaciliśmy już dług naukom przyrodniczym.

Sama matematyka też ulega pewnym automatyzmom. Ważne staje się, by je rozpoznać i nie napełniać się prawdami dawanymi przez te automatyzmy, niemającymi nic więcej do powiedzenia poza tym, że wzajemnie sobie nie przeczą. Widząc matematykę jako zmysł, a więc jako coś własnego, każdy nasz krok będzie poprzedzony pytaniem dokąd, a każde wypowiedziane przez nas zdanie będzie wyrażało nasze przekonanie.

W zwyczajowo pomyślanym *finis* widzimy obecnie inne obawy niż o sprzeczności i katastrofy, których świat dostarczał nam dotąd obficie. Matematyczność, która dawniej czuwała nad matematyką u jej źródeł, znajduje upodobania w jej rozbudowanych teologicznie partiach, których bieg dorównuje szybkością szalonemu rozwojowi nauk przyrodniczych. W wyniku samonapędzającego się wyścigu dochodzimy w wielu partiach matematyki do wybijania jakiegoś rytmu. Tymczasem matematyka ma w sobie dalekie poczucie swej wagi. To do niej należy przywilej wypowiadania ostatniego filozoficznego słowa. Sami matematycy, w swojej skromności, tak o sobie nie myślą, ale wielcy myśliciele, kiedy wyczerpią już dostępne sobie środki, zwracają się z nadzieją ku matematyce. Zapewne więc coś w tej matematyce jest?

Uniwersytet Śląski w Katowicach,
miodusze@math.us.edu.pl