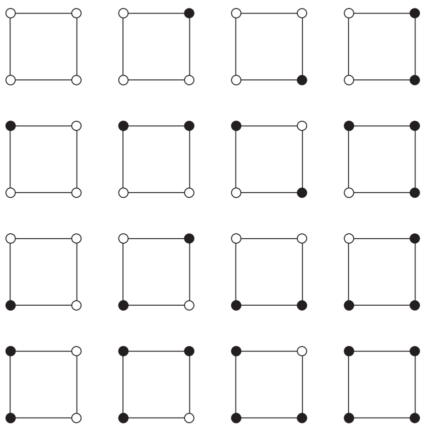
Kolorowanie wierzchołków kwadratu

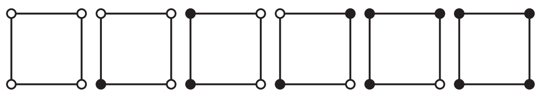
Wojciech GUZICKI, Warszawa*
*opracowała Agnieszka PRUSIŃSKA**, Siedlce*

Tekst przygotowany na podstawie artykułu W. Guzickiego *Numerowanie sześcianu* i odczytu wygłoszonego na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej nt. *Algebraiczne mocarstwo*, sierpień 2006.

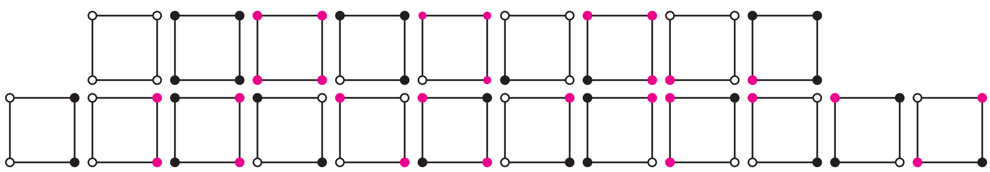
Wierzchołki kwadratu można dwoma kolorami pokolorować na 16 różnych sposobów:



Gdy za geometrycznie nierozróżnialne uznamy te pokolorowania, które różnią się jedynie położeniem kwadratu, czyli takie, dla których istnieje izometria kwadratu nakładająca jedno z nich na drugie (np. obrót o 90° nakłada drugie na trzecie narysowane powyżej pokolorowanie), to geometrycznie rozróżnialnych pokolorowań dwoma kolorami będzie 6.

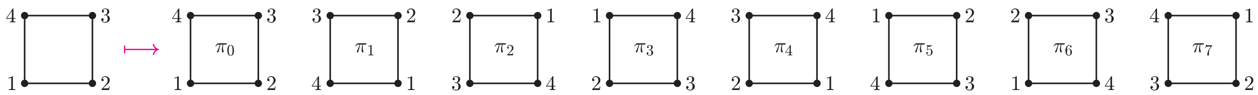


Używając trzech kolorów, można pokolorować wierzchołki kwadratu na 21 geometrycznie rozróżnialnych sposobów.



Grupa obrotów kwadratu.

Największa grupa przekształceń zbioru X to grupa jego *permutacji*, wszystkie inne są w niej zawarte (są jej *podgrupami*). Każda permutacja daje się przedstawić jako suma cykli – pisząc $(1,2,3)$, będziemy mieli na myśli cykliczną zamianę 1 na 2, 2 na 3 i 3 na 1. Oto rozkład na cykle wszystkich ośmiu elementów grupy przekształceń wierzchołków kwadratu na siebie:



$(1)(2)(3)(4)$ $(1,2,3,4)$ $(1,3)(2,4)$ $(1,4,3,2)$ $(1,2)(3,4)$ $(1,4)(2,3)$ $(1)(2,4)(3)$ $(1,3)(2)(4)$

Permutacje i kolorowania.

Niech będzie dany zbiór skończony A. **Kolorowaniem zbioru** A nazwiemy dowolną funkcję

$$c : A \to \{1, \ldots, k\}.$$

Mówimy też wtedy, że elementy zbioru A kolorujemy za pomocą k kolorów (nawet, jeśli nie wszystkie kolory zostały użyte). Niech K będzie zbiorem

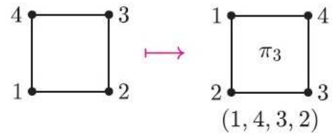
*Instytut Matematyki UW, W.Guzicki@mimuw.edu.pl

**Instytut Matematyki i Fizyki UPH w Siedlcach, aprus@uph.edu.pl

wszystkich kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów. Przypuśćmy następnie, że dana jest pewna grupa G przekształceń zbioru A na siebie (czyli podgrupa grupy wszystkich permutacji zbioru A). Definiujemy działanie permutacji $\pi \in G$ na kolorowania. Zaczniemy od przykładu. Niech A będzie zbiorem wierzchołków kwadratu, ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do 4. Mamy zatem

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

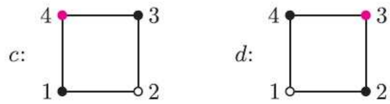
Niech następnie G będzie grupą obrotów kwadratu. Dokładniej, G jest grupą permutacji zbioru A generowanych przez obroty kwadratu. Niech ponadto zbiór $\{1, 2, 3\}$ będzie zbiorem kolorów; możemy np. przyjąć umowę, że 1 oznacza kolor biały, 2 oznacza kolor różowy i 3 czarny. Rozważmy permutację π_3 generowaną przez następujący obrót kwadratu



Wówczas $\pi_3 = (1, 4, 3, 2)$. Niech kolorowanie $c : A \to \{1, 2, 3\}$ będzie określone w następujący sposób:

$$c(1) = 3,\ c(2) = 1,\ c(3) = 3,\ c(4) = 2.$$

Wreszcie niech $d : A \to \{1, 2, 3\}$ będzie kolorowaniem powstającym z kolorowaia c przez „obrócenie" kolorowania c o $90°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara, czyli w taki sposób, w jaki działa na wierzchołkach kwadratu przekształcenie π_3.



Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
d(1) = 1 = c(2) = c(\pi_3^{-1}(1)),\\
d(2) = 3 = c(3) = c(\pi_3^{-1}(2)),\\
d(3) = 2 = c(4) = c(\pi_3^{-1}(3)),\\
d(4) = 3 = c(1) = c(\pi_3^{-1}(4)).
\end{aligned}$$

Możemy teraz przyjąć definicję ogólną

Działanie grupy G na kolorowania.

Definiujemy teraz grupę G^* przekształceń zbioru K. Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ definiujemy przekształcenie

$$\pi^* : K \to K$$

wzorem $\pi^*(c) = c \circ \pi^{-1}$. Wreszcie przyjmujemy

$$G^* = \{\pi^* :\ \pi \in G\}.$$

Ćwiczenie. Jeśli $k \geqslant 2$, $\pi, \sigma \in G$ oraz $\pi \neq \sigma$, to $\pi^* \neq \sigma^*$. W szczególności $|G^*| = |G|$.

Dwa kolorowania c i d uważamy za identyczne (nierozróżnialne ze względu na grupę G), jeśli istnieje permutacja $\pi \in G$ taka, że

$$d = \pi^*(c).$$

Naszym celem jest wyznaczenie liczby kolorowań rozróżnialnych (nieidentycznych) ze względu na grupę G.

Orbita i stabilizator.

Definicja. Jeśli G jest pewną grupą permutacji zbioru A oraz $a \in A$, to **orbitą** elementu a (ze względu na grupę G) nazywamy zbiór

$$O(a) = \{\pi(a) :\ \pi \in G\}.$$

Zatem naszym celem jest wyznaczenie liczby orbit grupy G^* w zbiorze K.

Definicja. Niech G będzie pewną grupą permutacji zbioru A i niech $a \in A$. Wówczas **stabilizatorem** elementu a nazywamy zbiór

$$S(a) = \{\pi \in G : \ \pi(a) = a\}.$$

Nietrudno zauważyć, że stabilizator elementu a jest podgrupą grupy G. Udowodnimy następujący lemat:

Lemat. Dla każdego elementu a zbioru A zachodzi równość

$$|S(a)| \cdot |O(a)| = |G|.$$

Dowód. Niech $O(a) = \{b_1, \ldots, b_r\}$. Wybieramy takie przekształcenia $\pi_1, \ldots, \pi_r \in G$, by

$$\pi_1(a) = b_1, \ldots, \pi_r(a) = b_r.$$

Niech $P = \{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$. Oczywiście $|P| = |O(a)|$. Pokażemy, że każde przekształcenie $\pi \in G$ można przedstawić jednoznacznie w postaci $\pi = \sigma \circ \rho$, gdzie $\sigma \in P$ oraz $\rho \in S(a)$. To oczywiście zakończy dowód.

Niech więc $\pi \in G$. Niech następnie $\pi(a) = b_s$, gdzie $1 \leqslant s \leqslant r$. Zatem $\pi(a) = \pi_s(a)$. Przyjmijmy

$$\sigma = \pi_s, \quad \rho = \pi_s^{-1} \circ \pi.$$

Oczywiście

$$\sigma \circ \rho = \pi_s \circ (\pi_s^{-1} \circ \pi) = \pi.$$

Ponadto $\sigma = \pi_s \in P$. Pokażemy, że $\rho \in S(a)$. Mianowicie

$$\rho(a) = (\pi_s^{-1} \circ \pi)(a) = \pi_s^{-1}(\pi(a)) = \pi_s^{-1}(\pi_s(a)) = a.$$

To dowodzi, że przekształcenie π może być przedstawione w żądanej postaci.

Przypuśćmy teraz, że

$$\pi_s \circ \rho = \pi_t \circ \tau,$$

gdzie $1 \leqslant s, t \leqslant r$ oraz $\rho, \tau \in S(a)$. Wówczas

$$\begin{aligned} (\pi_s \circ \rho)(a) &= (\pi_t \circ \tau)(a), \\ \pi_s(\rho(a)) &= \pi_t(\tau(a)), \\ \pi_s(a) &= \pi_t(a), \\ b_s &= b_t, \\ s &= t \end{aligned}$$

Zatem $\pi_s = \pi_t$, skąd oczywiście wynika, że $\rho = \tau$, co kończy dowód lematu.

Definicja. Niech G będzie pewną grupą przekształceń zbioru A i niech $\pi \in G$. Wtedy **charakterem** przekształcenia π nazywamy liczbę tych $a \in A$, dla których $\pi(a) = a$:

$$\chi(\pi) = |\{a \in A : \ \pi(a) = a\}|.$$

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie. (Lemat Burnside'a) Niech G będzie pewną grupą przekształceń zbioru A. Wtedy liczba orbit w zbiorze A (ze względu na grupę G) jest równa

$$t(G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

Dowód. Będziemy zliczać na dwa sposoby liczbę elementów zbioru

$$X = \{(\pi, a) \in G \times A : \ \pi(a) = a\}.$$

Dla każdego $\pi \in G$ istnieje $\chi(\pi)$ takich $a \in A$, dla których $\pi(a) = a$, czyli $(\pi, a) \in X$. Zatem

$$|X| = \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

Z drugiej strony, dla każdego $a \in A$ istnieje $|S(a)|$ takich przekształceń π, dla których $\pi(a) = a$, czyli $(\pi, a) \in X$. Zatem

$$|X| = \sum_{a \in A} |S(a)|.$$

Z poprzedniego lematu wynika, że

$$|X| = \sum_{a \in A} \frac{|G|}{|O(a)|} = |G| \cdot \sum_{a \in A} \frac{1}{|O(a)|}.$$

Przypuśćmy teraz, że zbiór A został rozbity na $r = t(G)$ orbit i niech $b_1, \ldots, b_r$ będą reprezentantami tych orbit. Wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{a \in A} \frac{1}{|O(a)|} &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{a \in O(b_j)} \frac{1}{|O(a)|} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{a \in O(b_j)} \frac{1}{|O(b_j)|} = \\ &= \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{|O(b_j)|} \cdot \sum_{a \in O(b_j)} 1 \right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{|O(b_j)|} \cdot |O(b_j)| \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{r} 1 = r = t(G).\end{aligned}$$

Zatem

$$|X| = |G| \cdot t(G),$$

czyli

$$|G| \cdot t(G) = \sum_{\pi \in G} \chi(\pi),$$

skąd natychmiast wynika teza lematu Burnside'a.

Przypuśćmy teraz, że dany jest zbiór A i pewna grupa G przekształceń zbioru A. Rozważamy zbiór K kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów i grupę G^* przekształceń zbioru K. Wówczas liczba orbit grupy G^* jest równa

$$t(G^*) = \frac{1}{|G^*|} \cdot \sum_{\sigma \in G^*} \chi(\sigma) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi^*).$$

Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ chcemy obliczyć $\chi(\pi^*)$. Przypuśćmy zatem, że $c \in K$. Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

$$\begin{aligned} \pi^*(c) &= c, \\ c \circ \pi^{-1} &= c, \\ c &= c \circ \pi, \\ \forall a \in A\ (c(\pi(a)) &= c(a)). \end{aligned}$$

Ostatni warunek jest równoważny temu, że wszystkie elementy tego samego cyklu (w rozkładzie permutacji π na cykle) są pokolorowane tym samym kolorem. Zatem, jeśli $z(\pi)$ oznacza liczbę cykli permutacji π, to

$$\chi(\pi^*) = k^{z(\pi)}.$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$t(G^*) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} k^{z(\pi)}.$$

Liczba kolorowań kwadratu.

Przypomnijmy, że grupa obrotów kwadratu składa się z następujących 8 permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$:

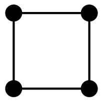
$$(1)(2)(3)(4), \quad (1,2,3,4), \quad (1,3)(2,4), \quad (1,4,3,2),$$
$$(1,2)(3,4), \quad (1,4)(2,3), \quad (1)(2,3)(3), \quad (1,3)(2)(4).$$

Zatem liczba cykli, to odpowiednio

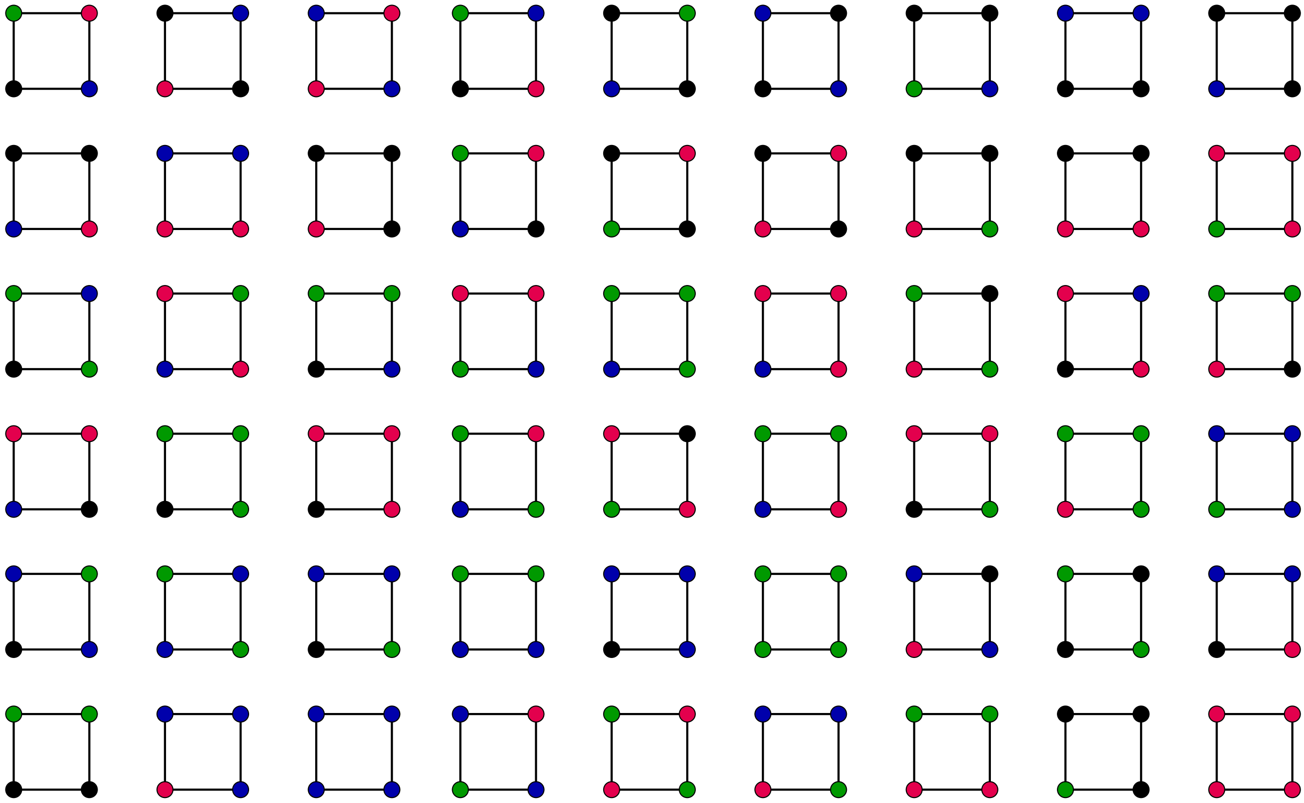
$$4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3.$$

Wobec tego liczba geometrycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków kwadratu za pomocą k kolorów jest równa

$$\frac{1}{8}\left(k^4+k+k^2+k+k^2+k^2+k^3+k^3\right)=\frac{1}{8}\left(k^4+2k^3+3k^2+2k\right).$$



I (proszę sprawdzić) dla $k=2$ otrzymujemy 6, dla $k=3$ i $k=4$ mamy odpowiednio 21 i 55 rozróżnialnych geometrycznie kolorowań. Oto wszystkie kolorowania wierzchołków kwadratu czterema kolorami:



Które z tych 55 pokolorowań są odróżnialne od ich obrazów lustrzanych? Można obliczyć, że powinno ich być 15.

Zliczanie orbit za pomocą indeksu cyklowego. (Polya, de Bruijn)

Pokażemy teraz ogólniejszą metodę zliczania orbit, której autorem jest G. Polya. Niech π będzie permutacją zbioru n-elementowego A. Liczbę cykli długości i permutacji π oznaczamy symbolem $\lambda_i(\pi)$. Oczywiście

$$\lambda(\pi)=\lambda_1(\pi)+\ldots+\lambda_n(\pi).$$

Niech G będzie pewną grupą permutacji zbioru A. **Indeksem cyklowym** grupy G nazywamy wielomian

$$P_G(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\pi\in G}x_1^{\lambda_1(\pi)}x_2^{\lambda_2(\pi)}\ldots x_n^{\lambda_n(\pi)}.$$

Bez dowodu podamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. (Polya – 1937, de Bruijn – 1959, 1964; a także w innej postaci Redfield – 1927)

Niech A będzie zbiorem n-elementowym i niech G będzie pewną grupą permutacji zbioru A. Niech K będzie zbiorem kolorowań zbioru A za pomocą m kolorów. Niech wreszcie wielomian

$$P_G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

będzie indeksem cyklowym grupy G. Wtedy liczba kolorowań zbioru A rozróżnialnych ze względu na grupę G jest równa

$$P_G(m, m, \ldots, m).$$

Następnie liczba kolorowań (rozróżnialnych ze względu na grupę G), w których kolor 1 występuje k_1 razy, kolor 2 występuje k_2 razy itd. (przy czym oczywiście zachodzi równość $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), jest równa współczynnikowi przy $w_1^{k_1} w_2^{k_2} \ldots w_m^{k_m}$ w wielomianie

$$W(w_1, w_2, \ldots, w_m) = P_G\left(\sum_{i=1}^m w_i, \sum_{i=1}^m w_i^2, \ldots, \sum_{i=1}^m w_i^n\right).$$

Wielomian $W(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ powstaje zatem z indeksu cyklowego $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ grupy G przez podstawienie:

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 + w_2 + \ldots + w_m, \\ x_2 &= w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_m^2, \\ \ldots & \quad \ldots \\ x_n &= w_1^n + w_2^n + \ldots + w_m^n. \end{aligned}$$

* * *

W artykule Wojciecha Guzickiego z XXXVII Szkoły Matematyki Poglądowej, do którego odsyłałam na początku tekstu, znajdują się następujące wzory na liczbę pokolorowań wierzchołków sześcianu za pomocą m kolorów rozróżnialnych ze względu na grupę obrotów

$$\frac{1}{24} \cdot \left(m^8 + 17m^4 + 6m^2\right)$$

i rozróżnialnych ze względu na całą grupę izometrii

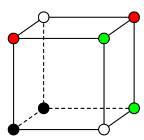
$$\frac{1}{48} \cdot \left(m^8 + 6m^6 + 21m^4 + 20m^2\right).$$

Artykuł kończył się zadaniem, do którego Autor dołączył kolorowe rysunki, co wówczas musieliśmy zastąpić odcieniami szarości. Skoro jednak dziś dysponujemy już kolorami, możemy przytoczyć zadanie kończące ten artykuł w pełnej krasie.

Zadanie.

Na ile sposobów (rozróżnialnych ze względu na grupę obrotów lub grupę izometrii) można pokolorować wierzchołki sześcianu czterema kolorami, po dwa wierzchołki każdego koloru?

A oto przykład takiego kolorowania:



Nietrudno zauważyć, że indeksem cyklowym grupy obrotów sześcianu jest wielomian

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2 x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2).$$

Natomiast indeksem cyklowym całej grupy izometrii sześcianu jest wielomian

$$P_G(x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{48}(x_1^8 + 6x_1^4 x_2^2 + 8x_1^2 x_3^2 + 13x_2^4 + 8x_2 x_6 + 12x_4^2).$$

Przystępujemy teraz do rozwiązania zadania.

Przypadek 1. Grupa obrotów sześcianu.

Po dokonaniu podstawienia opisanego w twierdzeniu otrzymamy następujący wielomian $W(w_1, w_2, w_3, w_4)$:

$$
\begin{aligned}
&W(w_1, w_2, w_3, w_4)\\
&= \frac{1}{24}\big((w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^8 + 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^2(w_1^3 + w_2^3 + w_3^3 + w_4^3)^2 +\\
&+9(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2)^4 + 6(w_1^4 + w_2^4 + w_3^4 + w_4^4)^2\ \big).
\end{aligned}
$$

Nietrudno zauważyć, że współczynnik przy $w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2$ jest równy:

$$\frac{1}{24}\left(\frac{8!}{(2!)^4} + 9 \cdot \frac{4!}{(1!)^4}\right) = 114.$$

W tym przypadku istnieje zatem 114 istotnie różnych kolorowań.

Przypadek 2. Grupa izometrii sześcianu.

Tym razem otrzymamy następujący wielomian:

$$
\begin{aligned}
W(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{1}{48}\big(&(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^8 +\\
&+6(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^4(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2)^2 +\\
&+8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)^2(w_1^3 + w_2^3 + w_3^3 + w_4^3)^2 +\\
&+8(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2)(w_1^6 + w_2^6 + w_3^6 + w_4^6) +\\
&+13(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2)^4 + 12(w_1^4 + w_2^4 + w_3^4 + w_4^4)^2\ \big).
\end{aligned}
$$

Współczynnik stojący przy $w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2$ jest tym razem równy:

$$\frac{1}{48}\left(\frac{8!}{(2!)^4} + 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{4!}{(2!)^2} + 13 \cdot \frac{4!}{(1!)^4}\right) = 68,$$

skąd wynika, że istnieje 68 kolorowań rozróżnialnych za pomocą grupy wszystkich izometrii sześcianu.

Wszystkie kolorowania sześcianu czterema kolorami (po dwa wierzchołki każdego koloru) zostały zebrane na poniższym rysunku. W celu łatwiejszego rozróżnienia tych kolorowań, zostały one pogrupowane w 8 grup i każda grupa otrzymała kod składający się z trzech liczb. Pierwsza liczba oznacza liczbę krawędzi mających końce tego samego koloru. Druga liczba oznacza liczbę przekątnych ścian o końcach tego samego koloru. Wreszcie trzecia liczba oznacza liczbę przekątnych sześcianu o jednakowych końcach. Wewnątrz każdego sześcianu jest podana liczba kolorowań danego typu (tzn. liczba kolorowań, które można otrzymać z danego kolorowania za pomocą obrotów). Wreszcie parami obok siebie zostały umieszczone kolorowania symetryczne (tzn. rozróżnialne za pomocą grupy obrotów i nierozróżnialne ze względu na grupę wszystkich izometrii).