Geometria rzutowa jako panaceum

Marek KORDOS, Warszawa*

nie mylić z pacaneum Lekarki Wiejskiej

Artur Cayley głosił, że geometria rzutowa to cała geometria. Wypada dodać i jeszcze wiele więcej. Oto kilka przykładów, w tym zwłaszcza dwa, które chcę nieco szerzej przedstawić na LIV Szkole Matematyki Poglądowej.

Taki problem

Na każdej karcie umieszczamy trzy kolory, przy czym każde dwie karty mają dokładnie jeden kolor wspólny.

Ile co najmniej jest kart i ile kolorów, jeśli każdy kolor występuje tyle samo razy?

Oczywiście, jest trywialne rozwiązanie: jedna karta, trzy kolory. Ale jakie są inne? Zaczynamy od dwóch kartek 🔴🟢🟤 🔴🔵🟡.

Ze względu na zieleń muszą być jeszcze 🟢🔵⚪ oraz 🟢🟡🟠, co zwiększyło liczbę kolorów do siedmiu i kartek do czterech.

Ale ze względu na brąz musimy dorzucić jeszcze 🟤🔵🟠 oraz 🟤🟡⚪.

Z kolei pokrzywdzona jest np. czerwień, więc dorzucamy 🔴⚪🟠.

Okazuje się, że już nikt nie jest pokrzywdzony!

Otrzymaliśmy siedmiokartowe DOꓭBLE.

Bo DOꓭBLE to zabawa kartami, które rozwiązują postawiony wyżej problem dla jakiegoś m, przy czym zamiast kolorów są obrazki. W handlu są francuskie zestawy, które mogłyby zawierać 57 kart – to dla starszych – i (wersja Kids, dla młodszych) 31 kart. Ale zawierają kart mniej, aby nie wszystkie karty były równoprawne (co pozwala na efekty typu Czarny Piotruś). Podobno takie zestawy kart zostały opracowane przez zespoły badawcze posługujące się (zapewne tajną) *teorią kodowania*.

Jeśli jednak ktoś nie zna tej wspaniałej metody, może postąpić np. tak.

Zapisujemy to, co otrzymaliśmy, w tabelce.

	🔴	🟢	🟤	🔵	🟡	⚪	🟠
1	×	×	×				
2	×			×	×		
3		×		×		×	
4		×			×		×
5			×	×			×
6			×		×	×	
7	×					×	×

Permutując kolumny $\genfrac{}{}{0pt}{}{1234567}{4125637}$, a potem wiersze $\genfrac{}{}{0pt}{}{1234567}{1324756}$, otrzymujemy tabelkę symetryczną, nie ma więc powodu, by inaczej nazywać jej wiersze niż kolumny.

	🔵	🔴	🟢	🟡	⚪	🟤	🟠
🔵		×	×			×	
🔴	×		×		×		
🟢	×	×		×			
🟡			×	×			×
⚪		×			×		×
🟤	×					×	×
🟠				×	×	×	

Podobieństwo tabelki do tabliczki mnożenia nasuwa od razu pomysł, by posłużyć się rachunkami. I rzeczywiście prowadzi to do interesujących zależności.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, kordos@mimuw.edu.pl

Piękny i głęboki artykuł o skończonej geometrii rzutowej napisany z racji DOBBLE autorstwa Mariusza Skałby znaleźć można w *Delcie* 4/2014.

To ta sama tabelka, tylko inaczej ponazywana;

	001	010	100	011	101	110	111
001		×	×			×	
010	×		×		×		
100	×	×		×			
011			×	×			×
101		×			×		×
110	×					×	×
111				×	×	×	

widzimy, że (mówiąc językiem DOBBLE'a) obrazek leży na kartce, czyli kolory incydują, gdy ich iloczyn skalarny modulo 2 znika.

Z tego, co pamiętamy o iloczynie skalarnym i wektorowym, wynika, że dwie kartki mają wspólny obrazek będący ich iloczynem wektorowym modulo 2.

I tak, trafiliśmy do geometrii rzutowej, choć pewnie nie wszyscy to zauważyli. Pora więc na nią.

Jak ona wygląda?

Swego czasu pewna Dama poprosiła mnie, abym opowiedział jej, jak wygląda płaszczyzna rzutowa, bowiem z bliska wygląda jak zwykła płaszczyzna ...

Oto moja opowieść.

Płaszczyznę rzutową można sobie wyobrażać np. na jeden z poniższych sposobów.

Sposób fizyczny. Na nieważkiej sztywnej (zwykłej, szkolnej) płaszczyźnie obieramy trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z nich wyposażamy w ciężar lub wypór (wypór to też ciężar, tylko ujemny – to on utrzymuje statki na powierzchni wody i unosi balony). Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt, w którym można podeprzeć tę płaszczyznę, aby nie zmieniała położenia – ten punkt to *środek ciężkości* tak obciążonej płaszczyzny. Można sprawdzić, że każdy punkt płaszczyzny jest – przy pewnym obciążeniu – jej środkiem ciężkości. Ale pewne obciążenia nie mają środka ciężkości na (zwykłej) płaszczyźnie: np. obciążenie, odpowiednio ciężarem 1, wyporem 1 i ciężarem/wyporem 0 (czasami fizycy nazywają to parą sił). Jeśli do płaszczyzny dołączymy (idealne) punkty pełniące rolę środków ciężkości dla takich obciążeń, to otrzymana wzbogacona płaszczyzna będzie płaszczyzną rzutową.

Sposób malarski. Patrząc na realne proste równoległe (np. szyny prostego toru kolejowego), mamy wrażenie, że na horyzoncie spotykają się. To spostrzeżenie stało się podstawą odkrytej przez malarzy Odrodzenia metody przedstawiania przestrzeni na płaszczyźnie obrazu zwanej *perspektywą zbieżną*. Jeśli do (zwykłej) płaszczyzny dołączymy wszystkie punkty horyzontu i jeszcze uznamy horyzont za prostą (pewnie taki by był, gdyby Ziemia była płaska, a nie kulista), otrzymamy płaszczyznę rzutową.

Sposób algebraiczny. Jeśli proporcjonalne trójki liczb (z wyłączeniem trójki zer) będziemy utożsamiali, to możemy jeden egzemplarz ich zbioru uznać za zbiór punktów, a drugi egzemplarz za zbiór prostych. Te dwa zbiory będą płaszczyzną rzutową, jeśli umówimy się, że punkt $[x_1, x_2, x_3]_\sim$ leży na prostej $[y_1, y_2, y_3]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = 0$.

Sposób astronomiczny. Najkrótsze linie na sferze (czyli powierzchni kuli) to okręgi wielkie. Uznając je za proste, otrzymamy *płaszczyznę sferyczną* – była ona badana przez astronomów już w zamierzchłej Starożytności jako sfera niebieska. Utożsamienie na płaszczyznie sferycznej punktów antypodycznych (czyli leżących na końcach tej samej średnicy sfery) czyni z niej płaszczyznę rzutową.

Gdy korzystamy z ciała siedmioelementowego na każdej kartce jest osiem obrazków, gdy z pięcioelementowego – sześć.
Dlatego za *rząd* n płaszczyzny rzutowej uważamy liczbę o jeden mniejszą od liczby punktów na prostej, a więc liczby kolorów w zadaniu podanym na początku: $n = m - 1$.

Sposób topologiczny. Zarówno koło, jak wstęga Möbiusa mają brzeg będący jedną krzywą zamkniętą. Gdy jest to **ta sama** krzywa, to tak połączone tworzą płaszczyznę rzutową.

Sposób aksjomatyczny. Płaszczyzną rzutową jest każdy obiekt złożony z punktów i prostych spełniających następujące trzy aksjomaty:
A1 Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.
A2 Każde dwie różne proste mają dokładnie jeden wspólny punkt.
A3 Istnieje czworokąt.

Wspomniana Dama była zadowolona z mojej opowieści do tego stopnia, że nawet nie wypomniała mi, iż sposób algebraiczny opisuje znacznie mniej obiektów niż sposób aksjomatyczny. Do naszych celów wystarczą jednak tylko takie płaszczyzny rzutowe, dla których możliwy jest opis algebraiczny, gdy liczby wzięte są z pewnego skończonego ciała.

Wówczas wszystko to, co powiedzieliśmy na początku, a co jest płaszczyzną rzutową dla ciała dwuelementowego, można powtórzyć dla innego ciała – w przytoczonych handlowych DOBBLE'ach jest to ciało siedmio- i pięcioelementowe.

Jakby tego było mało

Zapisałem to rozwiązanie tak jak Euler – stąd nazwa *kwadraty łacińsko-greckie*.

Nawet sam Euler nie wiedział, że rozpatrywany przez niego problem n oficerów różnych rang z n pułków też do geometrii rzutowej trafi.

Zobaczmy to w eulerowskiej postaci, gdzie rangi są oznaczane literami łacińskimi, a pułki greckimi. Chodzi o ustawienie tych n^2 oficerów w kwadrat tak, by ani pułk, ani ranga nie powtarzały się ani w wierszu, ani w kolumnie. Oto rozwiązanie (nie jedyne) dla $n = 5$.

Aα	Bβ	Cγ	Dδ	Eε
Bγ	Cδ	Dε	Eα	Aβ
Cε	Dα	Eβ	Aγ	Bδ
Dβ	Eγ	Aδ	Bε	Cα
Eδ	Aε	Bα	Cβ	Dγ

Dla sześciu pułków i sześciu rang nie jest to możliwe! Ta hipoteza Eulera została potwierdzona dopiero w 1900 roku (Tarry). Euler przypuszczał też, że nie jest to możliwe dla $4n + 2$ (bo dla 2 łatwo sprawdzić, że nie można). To przypuszczenie jest niesłuszne – niedobre są tylko 2 i 6.

Matematycy przeprowadzili Grexit i zamiast jednego kwadratu łacińsko-greckiego mówią o ortogonalnych kwadratach łacińskich,

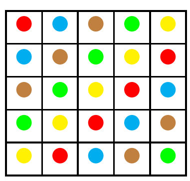
Aα	Bβ	Cγ	Dδ	Eε
Bγ	Cδ	Dε	Eα	Aβ
Cε	Dα	Eβ	Aγ	Bδ
Dβ	Eγ	Aδ	Bε	Cα
Eδ	Aε	Bα	Cβ	Dγ

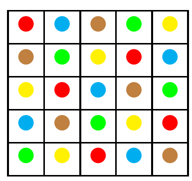
$\equiv$

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

α	β	γ	δ	ε
γ	δ	ε	α	β
ε	α	β	γ	δ
β	γ	δ	ε	α
δ	ε	α	β	γ

co dla analfabetów i przeciwników konfrontacji Rzymu z Bizancjum wygląda tak.



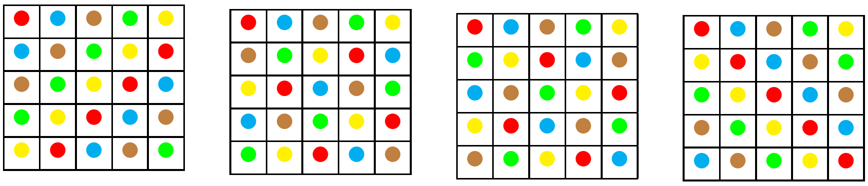


Kwadraty są zatem ortogonalne, gdy po nałożeniu ich w żadnej kratce nie pojawi się taka sama para (pary, jak wiadomo, są uporządkowane).

Liczba parami ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n nie może przekroczyć $n - 1$.

Ale, podobnie jak nie wiadomo do końca (czyli jak wygląda warunek konieczny i dostateczny), jakie skończone płaszczyzny rzutowe istnieją, tak nie wiadomo, dla jakich n to maksimum jest osiągalne.

Dla $n = 5$ to maksimum daje się osiągnąć.



No i znowu trafiliśmy do geometrii rzutowej,

bowiem z maksymalnego układu ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n można zrobić płaszczyznę rzutową tego samego rzędu.

Punktami są pary liczb ze zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$ oraz $n+1$ punktów **idealnych**, z których $n-1$ to nazwy kwadratów układu (A, B,...) – pozostałe oznaczmy ∞_1 i ∞_2.

Punkty idealne tworzą prostą.

Prostą tworzą też punkty będące indeksami kolumn w kwadracie rzędu n – do każdej z tych n prostych należy też ∞_1.

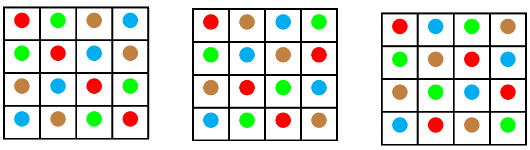
Podobnie punkty będące indeksami wierszy w kwadracie rzędu n tworzą prostą – do każdej z nich należy też ∞_2.

Pozostałe proste to nazwa kwadratu z układu i indeksy miejsc zajmowanych przez kolejny kolor.

Tę potworną zawiłość zobaczmy na przykładzie.

Oto maksymalny układ ortogonalnych kwadratów łacińskich dla $n = 4$,

A B C



a oto płaszczyzna rzutowa, jaką ten układ generuje

– najpierw regularne (**diagonalne**) proste:

A, $(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3)$	A, $(0,1),\ (1,0),\ (2,3),\ (3,2)$
A, $(0,2),\ (1,3),\ (2,0),\ (3,1)$	A, $(0,3),\ (1,2),\ (2,1),\ (3,0)$
B, $(0,0),\ (1,3),\ (2,1),\ (3,2)$	B, $(0,3),\ (1,0),\ (2,2),\ (3,1)$
B, $(0,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (3,3)$	B, $(0,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (3,3)$
C, $(0,0),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,1)$	C, $(0,2),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,3)$
C, $(0,3),\ (1,1),\ (2,0),\ (3,2)$	C, $(0,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,0)$

Do opisania pozostałych dziewięciu prostych kolory w kwadratach nie są już potrzebne.

To proste **pierwszego rodzaju**

$\infty_1,\ (0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)$	$\infty_1,\ (0,1),\ (1,1),\ (2,1),\ (3,1)$
$\infty_1,\ (0,2),\ (1,2),\ (2,2),\ (3,2)$	$\infty_1,\ (0,3),\ (1,3),\ (2,3),\ (3,3)$

drugiego rodzaju

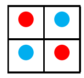
$\infty_2,\ (0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (0,3)$	$\infty_2,\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (1,3)$
$\infty_2,\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3)$	$\infty_2,\ (3,0),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)$

i prosta **idealna** A, B, C, ∞_1, ∞_2.

Ponieważ maksymalny układ ortogonalnych kwadratów rzędu n zawiera ich $n-1$, więc dla $n=2$ składa się z jednego kwadratu.

O dziwo, i w tej sytuacji można z tego zrobić płaszczyznę rzutową.

A



Oto jej proste

A, $(0,0)$, $(1,1)$	A, $(0,1)$, $(1,0)$
∞_1, $(0,0)$, $(1,0)$	∞_1, $(0,1)$, $(1,1)$
∞_2, $(0,0)$, $(0,1)$	∞_2, $(1,0)$, $(1,1)$

A, ∞_1, ∞_2

I tak otrzymaliśmy to samo siedmiokartkowe DOᗺBLE, co na początku.

Zadanie dla Czytelnika: ustawić te siedem kartek, opisanych dwoma sposobami, w tym samym porządku.

Warto też przypomnieć, że operacja odwrotna – od płaszczyzny rzutowej do maksymalnego układu ortogonalnych kwadratów łacińskich jest także zawsze realizowalna.

⋆ ⋆ ⋆

Powstaje zagadka: Dlaczego matematycy się tym zajmują?

Odpowiedź jest oczywista – bo powstają tu pytania, na które nie umieją odpowiedzieć.

Kluczowe z nich to pytanie, dla jakich rzędów tego rodzaju konstrukcje istnieją?

Dla kwadratu łacińskiego rzędu n można skonstruować kwadrat ortogonalny dla wszystkich n różnych od 2 i 6. Ale nie wiemy, dla których n istnieje maksymalny układ ortogonalnych kwadratów łacińskich (równoważnie: płaszczyzna rzutowa, DOᗺBLE itp.).

Wiemy, że jest tak dla $n=p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą, bo tam dają się użyć metody analityczne.

Ale wiemy też, że – poczynając od $n=9$ – istnieją inaczej zbudowane płaszczyzny rzutowe (dla $n=9$ nawet trzy).

Wiemy, że nie ma żadnej płaszczyzny rzutowej dla $n=10$.

Bodaj jedyne ogólne twierdzenie wykluczające jakieś n głosi, że

gdyby istniała płaszczyzna rzutowa rzędu n i n modulo 4 byłoby równe 1 lub 2, to n byłoby sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych,

ale to bardzo nieliczne wykluczenia.

Czyli niewiadome zaczyna się od $n=12$.