Perspektywa według Strzemińskiego – część druga

Marek KORDOS, Anna LUDWICKA***

Jest to skrócony zapis odczytu na LII *Szkole Matematyki Poglądowej*, Rynia, 2014.

Tekst naszego pierwszego odczytu został zamieszczony w numerze 33 czasopisma *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* na str. 15–25, http://www.msn.uph.edu.pl/msn/33/kordos@al.pdf

Sugerujemy by przed czytaniem tego tekstu przeczytać wyżej przytoczony, a i potem, przy czytaniu niniejszego, dogodnie będzie mieć tamten pod ręką i konfrontować jeden z nich z drugim.

Dziesięć lat temu mieliśmy zaszczyt prezentować odczyt pod prawie takim samym tytułem. Dziś chcieliśmy zaprezentować tę tematykę z „wyższego punktu widzenia".

Jan Gaj, wspaniały fizyk, bliski nam zwłaszcza z racji prowadzonego przez niego w *Delcie* działu *Laboratorium w domu*, porównywał wiedzę do tortu. Mówił, że dla konsumentów tort kroimy pionowo, aby poznali wszystkie jego smaki, ale gdybyśmy chcieli dyskutować o torcie z cukiernikami, sensownie byłoby „kroić" go poziomo, omawiać subtelności poszczególnych warstw. Podobnie dla studentów wiedzę będziemy wykładać pionowo, omawiać poszczególne dyscypliny, natomiast doktorantom warto przedstawiać wykłady poziome – według stosowanych metod. Dla przykładu, prawo Coulomba w wykładzie studenckim znajdzie się w elektromagnetyzmie, a w wykładzie dla doktorantów powinno się znaleźć razem ze zjawiskami, w których opisie stosujemy teorię potencjału.

Nasz poprzedni odczyt był „pionowy", wedle chronologicznie pojawiających się kierunków w plastyce. Teraz chcemy przedstawić odczyt „poziomy" i w tym właśnie celu spojrzymy inaczej na tytułowe pojęcie – perspektywę.

10 lat temu podaliśmy taką definicję perspektywy:
jest to zadanie konstrukcyjne – tak przedstawić rzeczywistość na płaszczyźnie obrazu, aby jak najlepiej, najdokładniej o niej poinformować.

Podręczników perspektywy malarskiej jest wiele – wypada przypomnieć, czemu wybraliśmy za przewodnik akurat *Teorię widzenia.*

Powód jest prosty, ale zasadniczy: Strzemiński jako bodaj jedyny zwrócił uwagę na fakt, iż poszukiwanie w konstrukcji obrazów jedynie optycznie trafnego odwzorowania $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^2$ jest wobec dokonań malarstwa czy grafiki absurdalne – wyraźnie widać, że twórcom chodziło o coś innego.

Czy np. *Guernikę* można uznać za takie odwzorowanie?

Picasso w sposób oczywisty nie prezentuje tu widoczku hiszpańskiego miasta, lecz przekazuje jeden sygnał: **bestialstwo** – wie, że nalot niemieckiego dywizjonu *Condor* daje początek potwornościom II wojny światowej.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Instytut Matematyki, UW, Banacha 2, 02-097 Warszawa, M.Kordos@mimuw.edu.pl

**ludekdesign@gmail.com

Idąc tym tropem i patrząc na sprawę „poziomo”, dochodzi się do wniosku, że problem perspektywy jedynie etymologicznie i potocznie dotyczy wyłącznie plastyki.

Należy za definicję perspektywy przyjąć następujący redukt poprzedniej:

jest to zadanie, jak przedstawić rzeczywistość, aby jak najlepiej o niej poinformować,

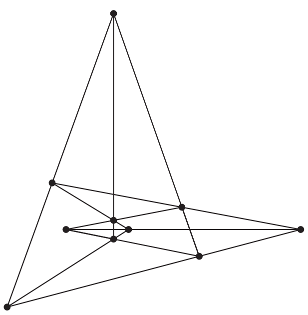
wtedy o perspektywie można mówić wszędzie – również w matematyce.

Usunęliśmy z poprzedniej definicji również słowo „najdokładniej”, bowiem już Tales wiedział, że **pełnej** informacji nie ma.

Stąd, każdy proces informacyjny deformuje rzeczywistość. Powstaje wtedy pytanie o **sens**, o **cel** owej deformacji – czyli o **perspektywę**.

Dla rozgrzewki: dwa przykłady różnych perspektyw w matematyce.

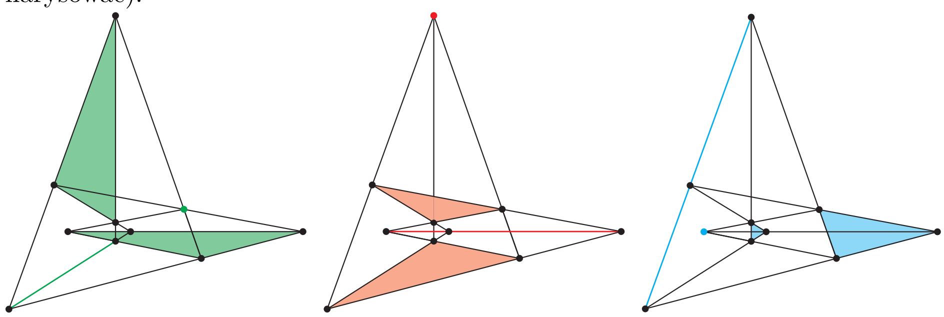
Symetria.



Rysunek ten bardzo łatwo wykonać – wystarczy zacząć go rysować od dowolnego punktu i dowolnej prostej, dowolnie też dobierając kolejne punkty – w efekcie otrzyma się 10 punktów na dziewięciu prostych, przy czym, gdy pozostanie nam połączenie trzech punktów, zawsze okażą się one współliniowe.

Potocznie (np. w szkole) symetrię kojarzymy z lustrem, a w nauczaniu początkowym tworzymy obrazy symetryczne za pomocą kleksografii. Chcąc jednak wyrazić inny aspekt geometrii płaszczyzny, Girard Desargues dostrzegł znacznie głębszą symetrię w rysunku popularnie nazywanym zagadką:
jak posadzić dziesięć drzew w dziesięciu rzędach po trzy w każdym rzędzie?

Rysunek na marginesie pokazuje jedno z możliwych 9 rozwiązań, a jego wyrafinowana symetria polega na tym, że każdy z punktów jest w nim w tej samej sytuacji. Jeśli popatrzymy na ten rysunek tak, że są to dwa trójkąty, których odpowiednie wierzchołki połączone są prostymi mającymi wspólny punkt, ich *środek perspektywiczny*, a ich przeciwległe boki przecinają się w punktach pewnej prostej, ich *osi perspektywicznej*, to rzuci się nam w oczy (czy na pewno?) fakt, że każdy z punktów jest środkiem perspektywicznym jakiejś pary już narysowanych trójkątów, a jest też narysowana ich oś perspektywiczna, za czym agitują poniższe trzy rysunki (pozostałych siedem każdy z pewnością umie sam narysować).



	×	×				×			
×		×					×		
×	×							×	
				×	×	×			
			×		×		×		
			×	×				×	
×			×						×
	×			×					×
		×			×				×
						×	×	×	

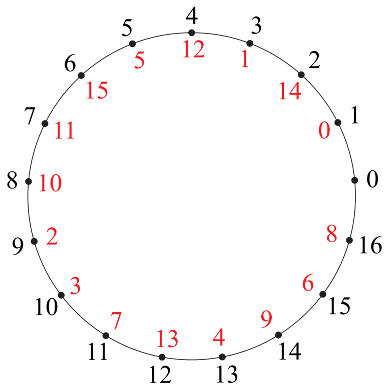
Poradnik dla niedowidzących: nazwij wierzchołki trójkątów na wybranym z pokolorowanych rysunków A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2, B_3, a proste A_iB_i nazwij c_i, proste A_iA_j nazwij a_k, gdzie $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, podobnie oznacz b_k. Przecięcie a_kb_k nazwij C_k, środek perspektywiczny oznacz O, a oś – o. A teraz nazwij wiersze tabelki kolejno $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, O$, kolumny zaś $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, o$. Znak × oznacza, że punkt leży na prostej.

Teraz już widać symetrię?

Ale to jeszcze nie koniec: z pewnością nie każdy umie spojrzeć na tabelkę na marginesie z takiej perspektywy, by zobaczyć, że to ten sam rysunek, co poprzednio narysowane konfiguracje Desarguesa. Jeśli jednak mu się to uda, to zobaczy, że konfiguracja ta ma jeszcze jedną symetrię – rola punktów i prostych jest identyczna, co nazywa się dualnością.

Co dają te nowe spojrzenia na symetrię? Co uzyskujemy dzięki takiej zmianie perspektywy?
- unaocznia dualność,
- dowodzi, że naturalne jest myślenie o geometrii w kategoriach rzutowych,
- pozwala wprowadzić metody analityczne, które każą wszelkie zależności opisywać za pomocą współrzędnych jednorodnych,
- wobec twierdzenia: *jeśli funkcja jednorodna w stopniu k jest klasy C^k, to jest wielomianem* prowadzi do geometrii algebraicznej.

Przypomnienie: funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest jednorodna w stopniu k, jeśli dla dowolnych argumentów i dowolnego λ spełnia warunek $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$.



To, że przenumerowanie siedemnastu punktów za pomocą liczby 3 jest możliwe, w teorii liczb wyraża się stwierdzeniem, iż 3 jest *pierwiastkiem pierwotnym* dla 17. Znamy niektóre pierwiastki pierwotne niektórych liczb naturalnych (np. 3 jest pierwiastkiem pierwotnym dla wszystkich liczb pierwszych Fermata, więc choćby dla 5, a 10 jest pierwiastkiem pierwotnym dla 7), ale żadna ogólna metoda znajdowania pierwiastków pierwotnych nie jest znana.

Porządek liczb naturalnych.

Każdy przyzna, że 17 punktów na okręgu zostało ponumerowanych czarnymi liczbami prawidłowo, normalnie. Dziewiętnastoletni Gauss uznał jednak, że bardziej sensownie jest spojrzeć na kolejność tych punktów tak, jak wskazują to liczby czerwone.

Cóż to za perspektywa?

Jest to wynik owijania okręgu, na którym jest 17 punktów, prostą, na której są punkty 3^k. Istotnie: $1 = 3^0,\ 3 = 3^1,\ 9 = 3^2,\ 10 = 3^3 - 17,\ 13 = 3^4 - 4 \cdot 17,$ $5 = 3^5 - 14 \cdot 17,\ 15 = 3^6 - 42 \cdot 17,\ 11 = 3^7 - 128 \cdot 17 \ldots$

Jakie są zalety takiego porządku? Popatrzmy na te punkty, jak na wektory o początku w środku okręgu. Nie wiem, czy od razu widać, że suma tych z numerami parzystymi leży na prostej łączącej środek okręgu z punktem oznaczonym czarną liczbą 0. Podobnie zresztą jak suma tych z numerami nieparzystymi, albo tych z numerami podzielnymi przez 4, albo podzielnymi przez 8 (no, to ostatnie to już każdy widzi!). Trudniej „zobaczyć”, że długość każdego z wymienionych wektorów da się kolejno obliczyć za pomocą równania kwadratowego (pierwsze z nich to $x^2 + x - 4 = 0$).

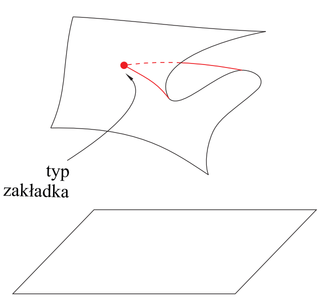
No, ale co daje nawet takie spostrzeżenie? Jakie są korzyści spoglądania z takiej perspektywy na porządek liczb naturalnych?
• Gauss zobaczył tym sposobem platońską konstrukcję 17-kąta, 257-kąta, 65537-kąta foremnego (i zobaczylibyśmy inne konstrukcje $2^{2^k} + 1$ kątów, gdybyśmy znali inne liczby pierwsze tej postaci),
• potem ujrzał dowód algebraicznej domkniętości liczb zespolonych,
• Galois z kolei dostrzegł w tej perspektywie teorię rozwiązalności równań algebraicznych,
a z wielu innych, korzystających z takiego sposobu patrzenia, niech zostaną wywołani
• Simon Newcomb i Paul Benford, którzy niezależnie odkryli prawo (udowodnione potem przez Bola, Sierpińskiego i Weyla) orzekające, iż dla potęg k, dla którego $\log k$ jest liczbą niewymierną, częstość pojawiania się na pierwszym miejscu zapisu dziesiętnego cyfry 1 jest równa 30,1%, 2 – 17,6%, 3 – 12,5%, 4 – 9,7%, 5 – 7,9%, 6 – 6,7%, 7 – 5,8%, 8 – 5,1%, 9 – 4,5%.

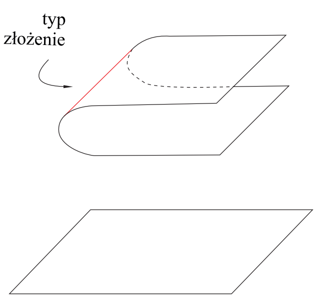
Jak widać choćby z tych przykładów, również w matematyce stosujemy różne perspektywy i tym sposobem odkrywamy przedtem dla nas niewidoczne osobliwości i głębokie tajemnice matematycznej przyrody.

Po tym wstępie spójrzmy na sytuacje, gdy perspektywa matematyczna i plastyczna głosiły to samo.

Linia.

Twierdzenie Whitneya o katastrofach dwuwymiarowych głosi, że
Jeżeli powierzchnia znajduje się w położeniu ogólnym, to ma wyłącznie osobliwości (katastrofy) dwóch typów: złożenie lub zakładka.

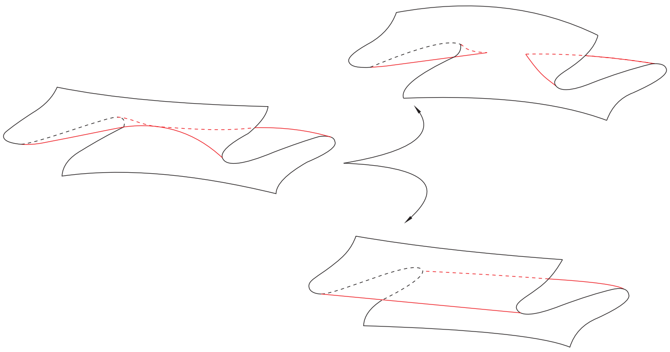




Praca Hasslera Whitneya *O odwzorowaniach płaszczyzny w siebie* dotyczy funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ postaci $f(x, y) := (f_1(x, y), f_2(x, y))$, gdzie $f_i \in C^\infty$.

Pomysł polega na tym, by przeciwdziedzinę przedstawić płasko, a nad każdym jej punktem umieścić wszystkie odpowiadające mu punkty dziedziny.

Katastrofa składa się z punktów osobliwych, a punkt osobliwy to ten, w którym rzut płaszczyzny stycznej do powyginanej dziedziny na przeciwdziedzinę nie jest płaszczyzną.



Teorię katastrof rozwinął René Thom, za co dostał medal Fieldsa. Istnieje kompletna lista katastrof elementarnych i wiemy, że dla wymiaru 1 elementarna katastrofa jest tylko jedna, dla wymiaru 2 – dwie, dla 3 – 5, dla 4 – 7, dla 5 – 11, a potem już nieskończenie wiele.

Zakładka i złożenie są stabilne – mała modyfikacja nie zmienia charakteru katastrofy. Takie katastrofy nazywa się elementarnymi (bo przecież – jak uczy nas życie – katastrofy mogą występować gromadnie).
Inne katastrofy stabilne nie są.

Twierdzenie Whitneya mówi, że w otoczeniu każdej funkcji znajdują się funkcje, których katastrofy to jedynie zakładki i złożenia.

Zaproponowana przez Whitneya perspektywa „koca na trawie” ma naturalną interpretację optyczną, punkty osobliwe to te, w których płaszczyzna styczna trafia nas w oko,
to są te punkty, które widzimy jako wyróżniające się, to są te linie, które powinniśmy narysować, pokonując trudność przedstawienia kreską twarzy *en face*.

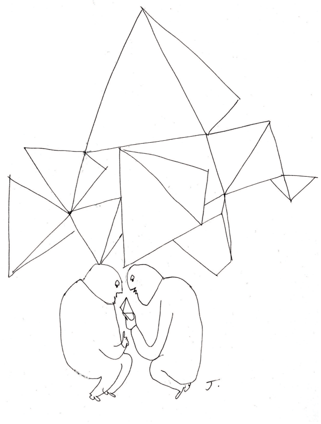
To najstarsza i do dziś najpowszechniejsza perspektywa rysunków i obrazów. Ma wiele odmian, ale jest doskonale identyfikowalna i ma niezastąpioną siłę przekazu.

To jeleń na rykowisku sprzed ok.17 tys. lat

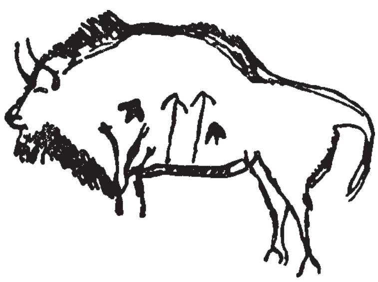
Tu widać, że dawni twórcy i odbiorcy ich dzieł dążyli wzrokiem za linią, nie zwracając uwagi na to, że inne linie na tym samym obszarze tworzą inne obrazy – to coś podobnego do naszej umiejętności dopowiadania sobie niedosłyszanych fragmentów mowy, czy niewyraźnych fragmentów tekstu.

Ilustracje Franciszki Themerson pokazują, że ciągła linia może wyrażać wszelkie relacje przestrzenne i emocjonalne.

A to współczesny biznesmen, inwestor budowlany, bohater popularnonaukowego dziełka Themersonów *Pan Tom buduje dom.*



I skrajnie inny stylowo rysunek tej samej pary autorów.



Strzemiński traktując sprawę historycznie, odróżnia używanie linii do zaznaczenia obrysu przedstawianego obiektu (perspektywa konturowa) od wkroczenia jej niejako „do wnętrza” (kontur w konturze), początkowo jedynie w celach instruktażowych, jak w rysunku cytowanym obok (gdzie wbijać oszczep). Ale wielość zastosowania linii okazała się niezmierzona.

Dość oczywiste wydaje się rozwinięcie linii w wyrazistą grafikę jednobarwną – wielu utożsamia pojęcie „grafika” z posługiwaniem się jedynie rysunkiem liniowym.

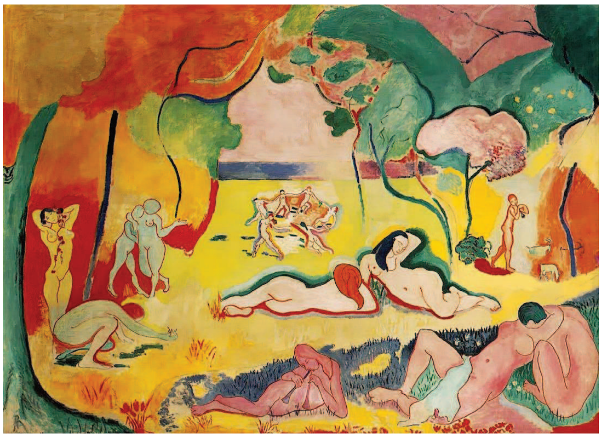
Albrecht Dürer, *Jeźdzcy Apokalipsy*

Za cykl grafik *Łucznik II* Władysław Skoczylas otrzymał w 1928 roku brązowy medal olimpijski.

Z ilustracji Gustave’a Dorégo do „Don Kichota”

Linie są niejako wpisane w istotę witrażu, gdzie kontury rysunku pokrywają się z ołowianym łączeniem barwnego szkła. Dziś uczymy w ten sposób łączenia linii z kolorem w książeczkach do pokolorowania. Witraże upowszechniły się w średniowieczu i są tworzone do dzisiaj. W szczególny sposób dokonały ekspansji w okresie secesji. Czech, Alfons Mucha, stworzył urzekające witraże w katedrze św. Wita w Pradze (poniżej na środku), ale kojarzymy go przede wszystkim z „witrażową” grafiką. Jego przepiękne prace graficzno-malarskie były obecne wszędzie jako murale, zdobienia wnętrz, projekty biżuterii, a nawet w reklamie, która przecież wtedy miała swoje początki.

Widoczna z lewej strony reklama papierosów jest wykonana z zachowaniem tych samych reguł widzenia co autentyczny witraż – „ołowiane” granice kolorów staną się charakterystyczne dla secesji. Z kolei z prawej strony mamy grafikę Zofii Stryjeńskiej, która wydaje się być niemal dalszym ciągiem witrażu Muchy – pokrewieństwo jest większe: Stryjeńska stworzyła liczącą się szkołę polskiego wzornictwa i reklamy graficznej (patrz choćby logo *Żywca*).

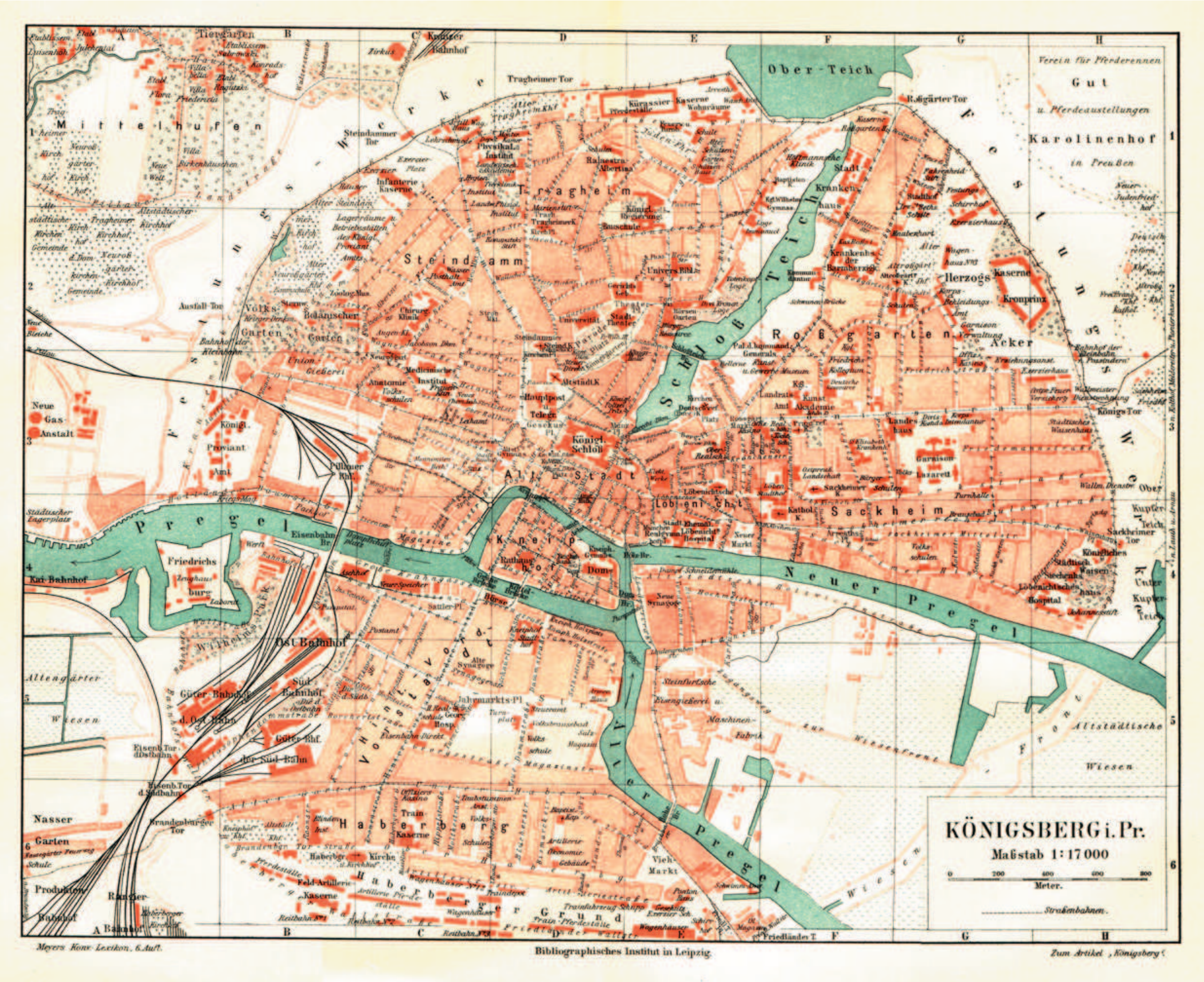


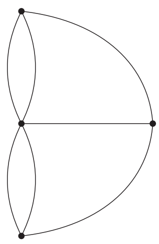
Jako przykład zastosowania perspektywy konturowej w malarstwie weźmy jednego z największych i najbardziej renomowanych artystów XX w., Henri Matisse’a, uważanego za jednego z inicjatorów sztuki nowoczesnej. Jego obrazy malowane są ostrą, schematyczną kreską, o żywych kolorach, kładzionych obok siebie w kontrastowych zestawieniach. Obraz przedstawiony obok nosi tytuł będący znamiennym dla Mattisse’a przesłaniem *Radość życia*.

Linia tryumfuje w widzeniu świata już 50 tysięcy lat, przybierając jednak przeróżne postaci.

Struktura.

Standardową procedurą w matematyce jest redukowanie złożonej struktury do grafu. Bardzo znanym przykładem jest zredukowanie XVIII-wiecznego Królewca





do grafu o czterech wierzchołkach i siedmiu krawędziach. Wielkie obszary gruntu są tu reprezentowane przez punkty-wierzchołki, z kolei ledwie dostrzegalne mosty są eksponowane przez wyraźne linie-krawędzie. Ale przecież o to w tej perspektywie chodzi – pytanie stojące przed Eulerem dotyczyło właśnie mostów: czy można przejść po nich, przechodząc po każdym dokładnie jeden raz. Realizm ustępuje tu ukazaniu wzajemnych relacji, powiązań. Choć może takie sformułowanie jest zasadniczo błędne: przecież dla problemu mostów królewieckich realne jest właśnie to, co przedstawia graf, podczas gdy plan miasta w pewnym sensie zaciemnia, ukrywa obiekt badany.

Tak kształtowały się perspektywy malarskie przełomu neolitycznego, gdy praludzkie stado stawało się ludzkim plemieniem i gdy wzajemne relacje stawały się znacznie ważniejsze od jednostkowej indywidualności.

Mimo iż dynamizm i realizm przedstawionej obok, odnalezionej w hiszpańskiej jaskini sceny stracia zbrojnego, przebija – naszym (i Strzemińskiego) zdaniem – dorobek nowożytnego malarstwa batalistycznego, wielu trudno było uwierzyć, że ten sposób postrzegania i relacjonowania świata jest bliższy nam w czasie od nieraz drobiazgowo dopracowanych bizonów czy lwów paleolitu. Jednak potrzeba informowania o wzajemnych relacjach tak jak stworzyła język, tak na parę tysięcy lat zapewniła dominację perspektywie sylwetkowej.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że owe sylwetki nie eksponowały siebie: na poprzedniej rycinie była to walka, z lewej widzimy nie tyle zgrabne, neolityczne tancerki z gór saharyjskich, co sam taniec, a z prawej mamy XX wieczną grafikę Matisse'a przedstawiającą harmonię gestu, a nie konkretną osobę.

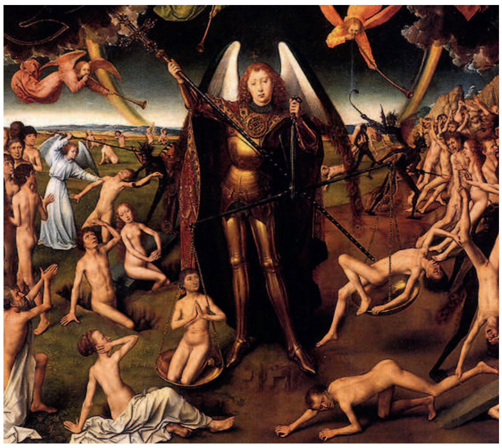
W polskim malarstwie analogicznych spojrzeń doszukiwać się można w pracach Jerzego Nowosielskiego czy uważanej za mistrzynię polskiej figuracji Teresy Pągowskiej.

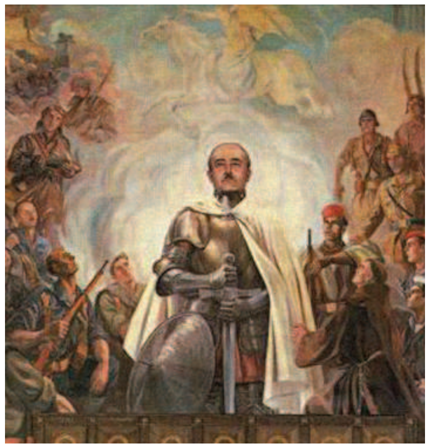
Jerzy Nowosielski, *Akt na plaży*

i *Dziewczyny na statku*;

Teresa Pągowska, *Green*

Struktura społeczna w sposób naturalny uświęca hierarchię swoich członków. Choć wielu twierdzi, że małe jest piękne, jednak często chylimy głowę przed wielkimi, a już im na pewno nie przychodzi do głowy, że są naszego rozmiaru. Ten element struktury demonstruje obecna od neolitu po dziś dzień perspektywa intencjonalna.

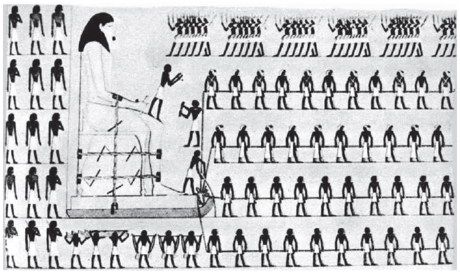


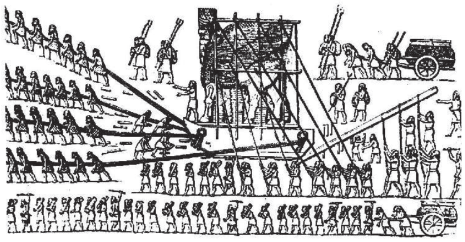


Faraon (grobowiec Nebamuna), Archanioł (*Sąd Ostateczny* Hansa Memlinga), czy generalissimus Franco (materiał propagandowy z hiszpańskiej wojny domowej, tej samej, której dotyczy *Guernika*) autentycznie dla autorów tych obrazów byli wielcy, tak wyglądała ich zdaniem rzeczywistość, taka była z ich perspektywy prawda, co więcej – taka była świadomość widzenia odbiorców ich dzieł.

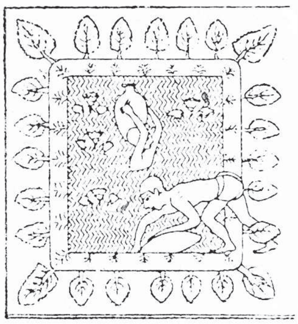
Ale nie tylko wielkość przywódców państwowych, duchowych czy militarnych decydowała o potędze struktur państwowych i społecznych. Był jeszcze wspólny, zbiorowy, skoordynowany wysiłek, pozwalający na dokonania nieosiągalne dla jednostek.

Takie widzenie nazywane jest – może nienajtrafniej – perspektywą wielorzędową. Nazwa ta pochodzi od mającego dziś 4000 lat malowidła z grobowca Dhutihotepa (transportowany przez 172 ludzi posąg ważył 60 ton) i współczesnej mu płaskorzeźby asyryjskiej (wyższa technika: wałki i dźwignie) oraz wielu analogicznie przedstawianych działań – odkrywców zadziwiało to, że naprężone liny załamują się pod kątem, a ustawienie pracujących w szeregach ma informować nas o ich usytuowaniu w głąb. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że ta perspektywa do dziś ma dla nas walor mocy, potęgi, siły, do czego odwołujemy się np. podczas defilad, choć już od ponad stu lat nigdy tak nie są formowane oddziały w walce.



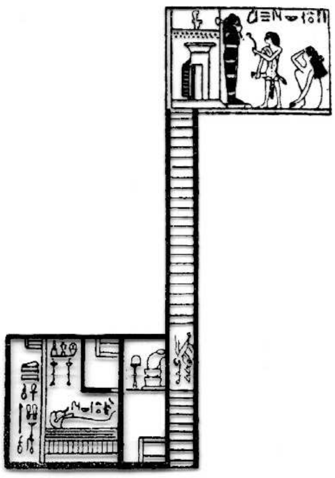


Instrukcja.

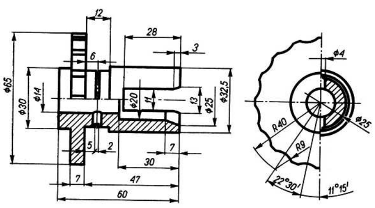


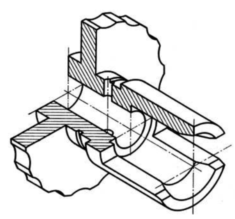
Współcześnie z perspektywą wielorzędową pojawia się w Egipcie niesłychanie wyrozumowana koncepcja notowania, kodowania za pomocą rysunku sytuacji tak, aby z niego można było odtworzyć z dużą precyzją to, co chciał zanotować autor, a czego naśladowanie optyczne nie mogłoby przekazać bądź przekazywałoby niedostatecznie precyzyjnie. Nazywa się tę perspektywę rozrzutowaną ze względu na jej początkowe realizacje.

Patrzymy na świat jak na pudełko (przeważnie prostopadłościenne), w którym się znajdujemy, zwracając się po kolei do jego ścian i denka (bądź dwóch – górnego i dolnego). I rysujemy to, co na ścianach i denkach widzimy. Następnie pudełko rozkładamy, bo przecież nasz obrazek musi być płaski.



Możliwości tej perspektywy sięgały znacznie dalej niż każdej z poprzednich: można było narysować coś, czego w ogóle nie widać, np. wnętrze lochu czy labiryntu.





Rysunek z lewej przedstawia komnaty wewnątrz piramidy, połączone klatką schodową. Z żadnego punktu nie można tego zobaczyć, ale nie wątpimy, że wykształcony Egipcjanin z epoki Średniego Państwa, bez trudu potrafił z tego rysunku dokładnie odtworzyć strukturę tych pomieszczeń. A nie wątpimy dlatego, że dziś inżynier bez problemu, patrząc na górne rysunki z prawej, widzi przedstawiony na niej detal, który dla „nieinżynierów” prezentujemy poniżej. Dzisiejsza konwencja perspektywy rozrzutowanej ma swoje miejsce w matematyce jako **geometria wykreślna**.

Kiedyś była ona nauczana na politechnikach, dziś, gdy komputery zastąpiły nas w sporządzaniu rysunków technicznych, uczy się już tylko ich odczytywania.

Nie sposób przecenić znaczenia rysunku technicznego dla naszej cywilizacji. Warto jednak zwrócić uwagę na podpowiedź, jaką perspektywa rozrzutowana niesie dla plastyki – dekompozycja, jako środek wyrazu powróci do nas w kubizmie, o czym dalej.

Oczywiście, można też bawić się w wyszukiwanie owej perspektywy w sztuce współczesnej. Wówczas przytacza się, na przykład, Kolorowe Malarstwo Tadeusza Dominika.