Szeregi liczbowe a liczba π

*Karol GRYSZKA**

Liczba π bezsprzecznie należy do najpowszechniej znanych stałych matematycznych, a przez wielu uważana jest również za najważniejszą. Jej historia sięga czasów Starożytnego Babilonu, skąd pochodzą pierwsze, datowane na okres 1900–1680 p.n.e., źródła świadczące o jej wykorzystaniu. Są to kamienne tablice, na których zawarty został opis wartości obwodu koła o średnicy 1, przybliżony przez wartość 3.125. Archimedes, będący prawdopodobnie pierwszym matematykiem badającym dokładniej wartość liczby π, w III w. p.n.e. oszacował ją z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Wraz z postępem matematyki odkrywano kolejne jej własności, jak niewymierność (udowodniona w roku 1761 przez Johanna Heinricha Lamberta) oraz przestępność (udowodniona w 1882 roku przez Ferdinanda Lindemanna). Przestępność oznacza, że nie istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych taki, że liczba π jest jego pierwiastkiem. Konsekwencją tego jest brak możliwości przedstawienia π za pomocą skończonego zapisu złożonego z liczb całkowitych, działań arytmetycznych, ułamków oraz potęg i pierwiastków. Własności te pozwoliły rozstrzygnąć wiele problemów geometrycznych związanych z liczbą π, między innymi problem kwadratury koła – konstrukcji kwadratu o polu równym polu danego koła przy użyciu wyłącznie cyrkla i linijki.

Współcześnie, dzięki ogromnej mocy obliczeniowej komputerów, można obliczyć wartość liczby π z dokładnością do wielu bilionów miejsc po przecinku. Odległe sekwencje cyfr w rozwinięciu mogą stanowić rodzaj klucza szyfrującego dane, zatem ważna jest umiejętność znalezienia techniki pozwalającej na wyznaczanie rozwinięcia dziesiętnego. Jedną z popularnych metod jest poszukiwanie szeregu zbieżego do liczby π.

Wśród wielu znanych wzorów reprezentujących liczbę π za pomocą szeregów nieskończonych najczęściej wyróżnia się dwa z nich. Pierwszym jest szereg Leibniza

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots ,$$

drugi powiązany jest z funkcją dzeta Riemanna:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots .$$

W niniejszym artykule zaprezentujemy mniej znane szeregi związane z liczbą π, które mają pewną istotną przewagę nad tymi przedstawionymi powyżej. Szeregi te wyprowadzone zostaną przy użyciu aparatury rachunku różniczkowego i całkowego. Czytelnik mniej biegły w tego typu zagadnieniach może swobodnie skupić się na postaci szeregów oraz ich skuteczności w przybliżaniu liczby π.

Szeroką gamę interesujących tożsamości można uzyskać wykorzystując własności funkcji gamma oraz beta Eulera. Przypomnijmy, funkcja gamma określona na przedziale $(0, +\infty)$ dana jest wzorem

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t,$$

natomiast funkcja beta określona na zbiorze $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ dana jest wzorem

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \mathrm{d}t.$$

Obie te funkcje wiąże znany wzór

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński, ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, karolgryszka@gmail.com

Przypomnijmy ponadto, że $\Gamma(n+1) = n!$, gdy $n \in \mathbb{N}$. Wymienione wyżej własności wykorzystamy do uzyskania kilku niebanalnych szeregów nieskończonych wiążących liczbę π. Pierwsza część tych wzorów jest konsekwencją tożsamości Lehmera.

Twierdzenie (Lehmer). Jeżeli $|x| < 1$, to

$$(L) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n\binom{2n}{n}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x.$$

Dowód. Zauważmy na wstępie, że

$$\frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{n!(n-1)!}{(2n)!} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = B(n+1, n).$$

Sumę z tezy możemy więc zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n\binom{2n}{n}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^{2n} B(n+1, n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^{2n} \int_0^1 t^n (1-t)^{n-1} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{4x^2 t}{1 - 4x^2 t(1-t)} \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość to efekt przejścia z sumowaniem pod znak całki oraz obliczenia sumy szeregu geometrycznego. Dokonując następnie zamiany zmiennych $s = x(2t-1)$ otrzymujemy całkę

$$\int_{-x}^{x} \frac{s}{s^2 + 1 - x^2} \mathrm{d}s + x \int_{-x}^{x} \frac{1}{s^2 + 1 - x^2} \mathrm{d}s.$$

Zauważmy, że pierwszy składnik to całka z ograniczonej funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, zatem jest zerem. Drugi składnik łatwo wyznaczymy sprowadzając całkę do arcusa tangensa. Po stosownych obliczeniach dostajemy ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n\binom{2n}{n}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x.$$

■

Tożsamość (L) jest jedną z wielu wiążących nieskończone sumy odwrotności symboli Newtona. Z nimi właśnie związane są trzy poniższe równości:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9},$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}},$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}.$$

Pierwszą z nich dostajemy podstawiając do wzoru (L) wartość $x = \frac{1}{2}$. Różniczkując teraz wzór Lehmera i biorąc $x = \frac{1}{2}$ dostajemy (2). Równość (3) natomiast to efekt scałkowania tożsamości i podstawienia $x = \frac{1}{2}$. Zachęcamy Czytelnika do wykonania odpowiednich rachunków. Oczywiście na tym nie koniec; możemy różniczkować bądź też całkować tożsamość (L) dowolnie wiele razy otrzymując coraz to ciekawsze wzory.

Zastosujemy teraz nieco odmienną (zbliżoną) technikę, dzięki której z powodzeniem można tworzyć kolejne reprezentacje liczby π w postaci szeregów.

Wymienimy trzy z nich:

$$\text{(4)} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{\pi-3}{4},$$

$$\text{(5)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{\pi\sqrt{3}-3\ln 3}{12},$$

$$\text{(6)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} = \frac{6\ln 2-\pi}{24}.$$

Jeszcze inne sposoby obliczania π można znaleźć w artykułach Marcina Kuczmy w *Delcie* 6 i 7 z 1980 roku oraz w *Matematyce-Społeczeństwie-Nauczaniu* nr 2.

Ideę zaprezentujemy na przykładzie tożsamości (6). Przez analogię do rozumowania użytego w dowodzie tożsamości (L) otrzymujemy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(4n+4)!} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(4n+1)\Gamma(4)}{\Gamma(4n+5)} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} B(4n+1,4) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{4n}(1-t)^3 \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1-2t^2+t^2}{1+t+t^2+t^3}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{24}\left(6\ln 2-\pi\right).
\end{aligned}$$

Uważny Czytelnik łatwo zastosuje przedstawioną wyżej technikę do dowodu dwóch pozostałych tożsamości. Być może uda się wyprowadzić inne, nieujęte wyżej, wzory?

Przewagą wymienionych wyżej sześciu wzorów jest ich lepsze zastosowanie w wyznaczeniu przybliżenia wartości liczby π. O ile wzór Leibniza jest piękny i bardzo prosty, o tyle jest niepraktyczny – trzeba dodać kilkaset początkowych wyrazów, by uzyskać przybliżenie liczby π do trzeciej cyfry po przecinku. Z kolei wzór (6) jest szeregiem o wyrazach rzędu n^4, wystarczy więc dodać kilka początkowych wyrazów, by uzyskać przybliżenie prawej strony z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Przewaga szeregów (1)–(6) w szybkości wyznaczania przybliżenia liczby π staje się tym bardziej widoczna, im więcej cyfr rozwinięcia dziesiętnego chcemy wyznaczyć.