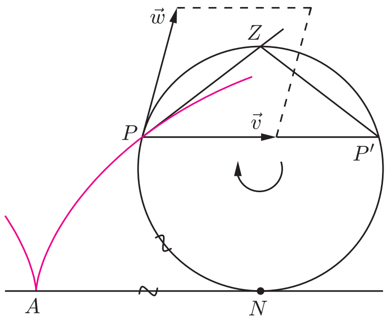
Wykład wygłoszony w dniu 22.05.2014 r. w Siedlcach

Cykloida i okolice

*Na podstawie wykładu Marka KORDOSA**
*opracowała Agnieszka PRUSIŃSKA***

Cykloida to tor punktu okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej (zatem na rysunku 1 łuk PN ma tę samą długość co odcinek AN). Składa się ona z oddzielnych łuków, połączonych ostrzami. Jej najważniejszą własnością jest fakt, iż w każdym jej punkcie styczna do niej przechodzi przez najwyższy punkt wyznaczającego ją okręgu. Możemy uzasadnić tę własność w następujący sposób. Wektor $\vec{v}$ jest prędkością ruchu poziomego, a wektor $\vec{w}$ to prędkość ruchu obrotowego, czyli jest on styczny do okręgu. Ponieważ ruch odbywa się bez poślizgu, więc długości tych wektorów są równe, a ich wypadkową jest wektor opisujący ruch po cykloidzie, styczny do cykloidy. Tworzy on (jako przekątna rombu) jednakowe kąty z tymi wektorami. Natomiast kąt między wektorem $\overrightarrow{w}$ i PZ jest równy kątowi $PP'Z$ (zgodnie z własnością, że kąt wpisany jest równy kątowi dopisanemu). Ponieważ punkt Z jest punktem najwyższym, a prosta PP' jest pozioma, więc trójkąt PZP' jest równoramienny. Wynika z tego, że kąt między wektorem $\vec{w}$ i PZ jest taki sam, jak kąt między PZ i wektorem $\vec{v}$. Zatem prosta PZ zawiera przekątną rombu utworzonego przez $\vec{v}$ i $\vec{w}$.



Rys. 1.

Obejrzymy, co cykloida zdziałała w zegarmistrzostwie i podróżach morskich, w saneczkarstwie i rachunku wariacyjnym, w optyce i mechanice kwantowej oraz, przy okazji, zmierzymy jej długość i ograniczające ją pole.

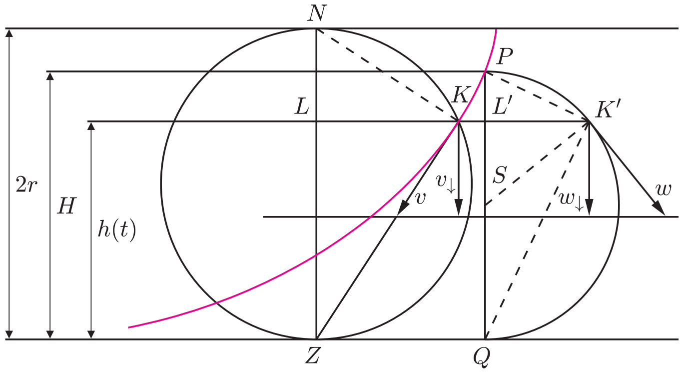
W XVII wieku problem zapewnienia bezpiecznej żeglugi był zagadnieniem najwyższej wagi ze względu na to, że w tym czasie to właśnie flota przynosiła największe zyski. Wobec tego umiejętność określania przez załogę położenia okrętu była jednym z podstawowych elementów tego bezpieczeństwa. Jak wiadomo, szerokość geograficzna jest pojęciem przyrodniczym, można ją określić z gwiazd. Natomiast długość geograficzna jako kątowa odległość od południka zerowego jest pojęciem umownym. Do jej określenia (przed GPS) niezbędny był zegar. Jedyną metodą określenia długości geograficznej w XVII wieku było znalezienie różnicy czasu między punktem, w którym znajdował się okręt, a dowolną miejscowością na zerowym południku. Największe admiralicje ogłosiły zatem konkurs na skonstruowanie chronometru odpornego na chybotanie okrętu. Za kryterium oceny dokładności wskazywanego czasu przyjęto, by taki zegar przewieziony z Europy do Ameryki i z powrotem wskazywał czas nieróżniący się od wyjściowego więcej niż o minutę. Należało zatem skonstruować zegar wahadłowy, który mimo iż poddawany różnym przechyleniom i wstrząsom, będzie chodził dokładnie.

Jak stwierdził Galileusz, okres wahania wahadła nie zależy od wychylenia jedynie wtedy, gdy wychylenie jest takie, że można stosować przybliżenie $\alpha = \sin\alpha$, więc do konstruowanego zegara nie można było użyć zwykłego wahadła. Powstało zatem pytanie, po jakiej linii powinno się ono wahać, czyli jaki kształt powinna mieć krzywa, żeby staczające się po niej ciało osiągało jej najniższy punkt w tym samym czasie niezależnie od tego, gdzie rozpoczynało swój ruch. Krzywa mająca tę własność nazywa się *izochroną* lub *tautochroną*. Potrzebne było więc wahadło tautochroniczne i korzystający z niego zegar. Mimo ogromnej nagrody za „zegar morski" nikt (w tej liczbie Galileusz) problemu rozwiązać nie umiał. Christiaan Huygens (1629–1695) wpadł na pomysł poszukiwania najpierw krzywej tautochronicznej i postawił hipotezę, że jest nią cykloida. Zajął się pionową składową staczania się kulki po cykloidalnej miseczce, ponieważ nie było istotne, jak kulka się toczy, tylko w jakim tempie się obniża i kiedy osiągnie najniższy punkt swojego położenia.

W punkcie P, leżącym na wysokości H nad najniższym punktem odwróconej cykloidy, kładziemy kulkę i pozwalamy jej się staczać (rys. 2). Po upływie czasu t znajdzie się ona w punkcie K, na wysokości $h(t)$.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Instytut Matematyki, UW, Banacha 2, 02-097 Warszawa, kordos@mimuw.edu.pl

**Wydział Nauk Ścisłych, Instytut Matematyki i Fizyki, UPH w Siedlcach, Konarskiego 2, 08-110 Siedlce, aprus@uph.edu.pl



Rys. 2.

Zauważmy, że trójkąt utworzony przez wektory $\vec{v}$ i $\vec{v}_{\downarrow}$ (rys. 2) jest podobny do trójkąta ZKL, zatem (ponieważ są to trójkąty prostokątne)

$$\frac{|\vec{v}_{\downarrow}|}{|\vec{v}|} = \frac{LZ}{KZ} = \frac{LZ}{\sqrt{LZ \cdot NZ}} = \sqrt{\frac{LZ}{NZ}} = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}}.$$

Genialny pomysł Huygensa polegał na zajęciu się wirtualną kulką staczającą się po półokręgu równo z kulką realną. Ponieważ nie umiał sobie poradzić z ruchem po cykloidzie, więc wyobraził sobie obniżanie się kulki w tym samym tempie po półokręgu, na którym ruch daje się łatwo opisać. Założył tylko, że wirtualna kulka poruszająca się po okręgu jest zawsze na tym samym poziomie, co kulka staczająca się po cykloidzie. Dla tej hipotetycznej kulki poruszającej się po okręgu mamy (znów z podobieństwa trójkątów prostokątnych)

$$\frac{|\vec{w}_{\downarrow}|}{|\vec{w}|} = \frac{K'L'}{K'S} = \frac{\sqrt{PL' \cdot L'Q}}{PS} = \frac{\sqrt{(H - h(t)) \cdot h(t)}}{\frac{H}{2}}.$$

Z założenia składowe pionowe prawdziwego i hipotetycznego ruchu miały być równe, $|\vec{w}_{\downarrow}| = |\vec{v}_{\downarrow}|$, co daje

$$|\vec{v}| \cdot \sqrt{\frac{h(t)}{2r}} = |\vec{v}_{\downarrow}| = |\vec{w}_{\downarrow}| = |\vec{w}| \cdot \frac{2\sqrt{(H - h(t)) \cdot h(t)}}{H},$$

czyli

$$|\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \frac{H}{2}\sqrt{\frac{1}{2r(H - h(t))}}.$$

Zauważmy, że do tej pory nigdzie nie został wykorzystany fakt, iż mamy do czynienia ze spadkiem realnej kulki pod wpływem grawitacji. Ten aspekt ruchu wyraża się np. w fakcie, że energia kinetyczna równa jest utracie energii potencjalnej, a więc

$$\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2} = mg(H - h(t)),$$

gdzie g jest wartością przyśpieszenia ziemskiego. Otrzymujemy stąd

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^{\,2}} = \sqrt{2g(H - h(t))}.$$

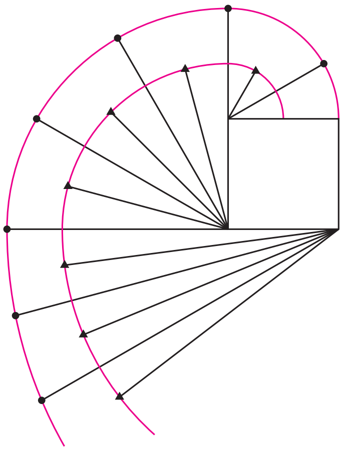
Uwzględniając wcześniejsze rozważania geometryczne, mamy

$$|\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \frac{H}{2}\sqrt{\frac{1}{2r(H - h(t))}} = \sqrt{2g(H - h(t))} \cdot \frac{H}{2}\sqrt{\frac{1}{2r(H - h(t))}}.$$

Jak widać, $|\vec{w}| = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}$, co nie zawiera t. Ruch kulki jest więc jednostajny. Skoro tak, to można łatwo obliczyć, ile trwa:

$$T = \frac{\pi\frac{H}{2}}{|\vec{w}|} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Czas jest więc stały – nie zależy od H, a więc od wysokości, na jakiej położyliśmy kulkę. Zatem cykloida jest tautochroną.

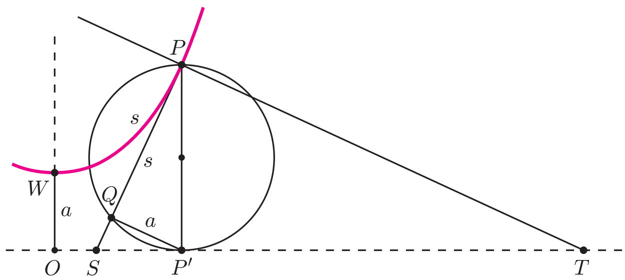


Rys. 3.

Wiemy już, jak wygląda tautochrona, ale jak zmusić zawieszony ciężarek, aby wahał się nie po okręgu, lecz po cykloidzie? I tu jest drugi genialny pomysł Huygensa, *rozwijanie nici* zwane dziś w matematyce ewolwentą.

Obok dwie spośród ewolwent kwadratu (rys. 3): żaden kawałek jednej nie pasuje do drugiej. Kwadrat to ewoluta każdej z nich. Dana krzywa może mieć bardzo wiele ewolwent w zależności od tego, w którym jej punkcie kończy się nawinięta nić. Czasem są to jednakowe krzywe (jak w przypadku okręgu), czasem różne.

Dygresja
– krzywa łańcuchowa i jej ewolwenta

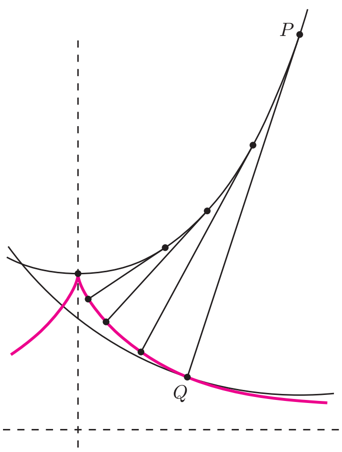


Rys. 4.

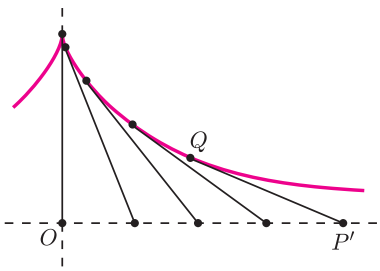
Łańcuch powieszony na dwóch gwoździach zwisa tak, że jego położenie opisuje równość $y = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, gdzie a to wysokość jego najniższego punktu nad osią x-ów. Jeśli jednak wyrazić jego kształt jako funkcję długości s, otrzyma się przedstawienie parametryczne

$$\left(a \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a},\ \sqrt{s^2 + a^a}\right).$$

Obrzydliwa jest ta pierwsza współrzędna, ale druga mówi nam, że jeśli w dowolnym punkcie P krzywej łańcuchowej poprowadzimy odcinek łączący go z jego rzutem na oś x-ów i narysujemy okrąg, dla którego ten odcinek jest średnicą (rys. 4), to w tym okręgu da się odnaleźć (gdy odłożymy odcinek długości a) odcinek, którego długość będzie równa długości łuku krzywej łańcuchowej od wierzchołka W do punktu P. Jeśli więc będziemy rozwijali z tej krzywej nić o końcu w W, to odcinek stycznej do otrzymanej krzywej do jej przecięcia z osią x-ów będzie miał stałą długość a.
Ta ewolwenta krzywej łańcuchowej będzie więc traktrysą, czyli krzywą, której obrót dokoła osi x-ów to pseudosfera, ale to już zupełnie inna historia – **koniec dygresji**.

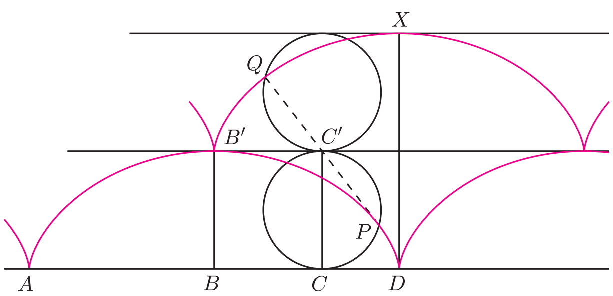


Rys. 5.



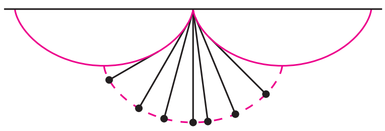
Rys. 6.

Dla odkrycia budowy wahadła tautochronicznego ważne jest spostrzeżenie, że jedną z ewolwent cykloidy jest również cykloida i to identyczna z tą, z której powstała. Huygens wykazał to, kreśląc dwie cykloidy w taki sposób, że drugą zakreśla okrąg toczący się po prostej stycznej do najwyższych punktów pierwszej cykloidy, przy czym druga cykloida ma swoje najniższe punkty w tych punktach styczności. Cykloida ta jest ewolwentą dolnej cykloidy, zakreśloną przez napiętą nić, której koniec początkowo znajdował się w najwyższym punkcie dolnej cykloidy. Na rysunku 7 narysowane są okręgi zakreślające obie cykloidy, w sytuacji gdy są one styczne. Stwierdzamy, że odcinek AB jest równy połowie długości okręgu, zaś odcinek AC jest równy łukowi $CC'P$, bo toczenie odbywa się bez poślizgu. Wobec tego odcinek BC jest równy łukowi $C'P$. Ponadto odcinek BC jest równy $B'C'$, a ten znowu jest równy łukowi QC'.



Rys. 7.

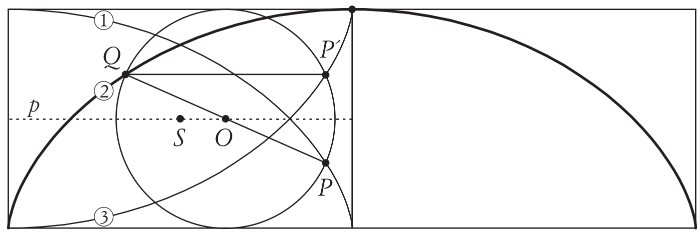
Oba okręgi razem z wyróżnionymi punktami P i Q są środkowo symetryczne, zaś środkiem symetrii jest C'. Wobec tego punty P, Q i C' leżą na jednej prostej, która jest styczna do dolnej cyloidy w punkcie P, ponieważ przechodzi przez najwyższy punkt wyznaczającego punkt P okręgu. Jest to napięta nić, która w położeniu DX wyprostuje się i wtedy dokładnie widać, że jest długości $4r$. Czyli długość cykloidy od ostrza do ostrza jest równa $8r$.



Rys. 8.

W ten sposób dowiedzieliśmy się, jaka jest długość łuku cykloidy i mamy (rys. 8) wahadło tautochroniczne!

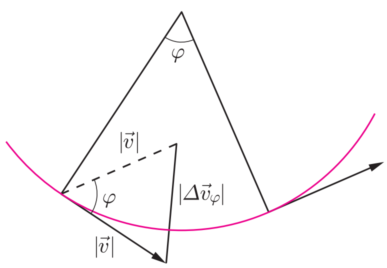
Zostawmy na chwilę zegary i zobaczmy, jak Giles Roberval obliczył pole pod cykloidą.



Rys. 9.

Jak widzieliśmy na poprzednich rysunkach, łuk cykloidy mieści się w prostokącie o wymiarach $2r \times 2\pi r$. Przesuńmy teraz drugą połowę cykloidy tak, aby (jako ①) znalazła się nad pierwszą połową ② (rys. 9). Następnie narysujmy ③ – obraz pierwszej połowy cykloidy w symetrii względem S. Zauważmy, że gdy najniższy punkt toczącego się okręgu narysuje łuk ② cykloidy do punktu Q, jego najwyższy punkt powędruje po ① do punktu P. Łuk ③ to jednocześnie obraz symetryczny łuku ① w symetrii względem prostej p, równoległej do dłuższego boku prostokąta i przechodzącej przez O. Zatem zarówno okrąg, jak i krzywe ① i ③ mają wspólną oś symetrii. Stąd przecięcie P okręgu z ① i przecięcie P' okręgu z ③ są symetryczne względem p. Wobec tego odcinek PP' jest pionowy, a ponieważ trójkąt QPP' jest prostokątny, więc odcinek QP' jest poziomy. Pole otrzymanej soczewki zbudowanej z łuków ② i ③ jest, wobec zasady Cavalieriego, równe polu koła ograniczonego przez okrąg wyznaczający cykloidę. Istotnie, na każdej prostej poziomej okrąg wyznaczający cykloidę i soczewka mają przekrój tej samej długości. Teraz możemy łatwo zauważyć, że pole pod cykloidą składa się z połowy pola prostokąta i pola soczewki (równego polu koła), czyli

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot 2r + \pi r^2 = 3\pi r^2.$$



Rys. 10.

Wróćmy do zegarów. Oczywiście, pomysł zegara z wahadłem tautochronicznym tej postaci został odrzucony, ponieważ takie wahadło musiałoby się wahać w płaszczyźnie, co trudno zapewnić na okręcie. Stąd Huygens wpadł na pomysł innego wahadła, którym było wahadło obrotowe. W takim wahadle ciężarek na nici krąży po okręgu, a wtedy nić zakreśla powierzchnię boczną stożka obrotowego. Należy się teraz zastanowić, przy jakim tempie obrotu siła odśrodkowa zrównoważy siłę ciężkości. Ciało poruszające się po okręgu o promieniu R z prędkością $\vec{v}$ w ciągu czasu t przebywa łuk okręgu o kącie środkowym φ (rys. 10). Zacznijmy od obliczenia siły odśrodkowej. Zauważmy, że zmiana kierunku prędkości ma wartość

$$|\Delta\vec{v}_\varphi| = 2 \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \quad t = \frac{R\varphi}{|\vec{v}|},$$

więc ponieważ ruch jest jednostajny, to

$$\frac{|\Delta\vec{v}_\varphi|}{t} = \frac{2|\vec{v}|\sin\frac{\varphi}{2} \cdot |\vec{v}|}{R\varphi} = \frac{\vec{v}^{\,2}}{R} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \to \frac{\vec{v}^{\,2}}{R}.$$

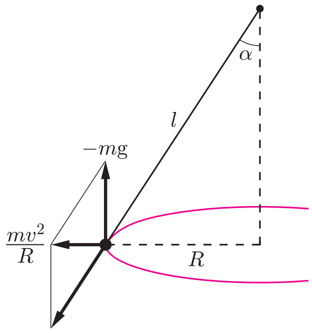
Zatem siła odśrodkowa to $\frac{m\vec{v}^{\,2}}{R}$.

Kiedy wahadło będzie się obracać w poziomie? Wtedy, gdy będzie ono stabilne, czyli gdy jego obroty będą wywoływały siłę odśrodkową równoważącą siłę ciążenia, a więc (rys. 11) gdy

$$\frac{m\vec{v}^{\,2}}{R} = mg\operatorname{tg}\alpha,$$

skąd

$$|\vec{v}| = \sqrt{gR\operatorname{tg}\alpha}.$$

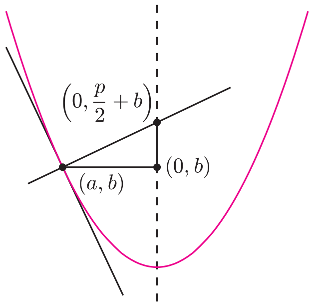


Rys. 11.

Pozwala to obliczyć okres obiegu stabilnego wahadła stożkowego:

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\operatorname{ctg}\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

Zależy on tylko od długości rzutu nici na oś obrotu. Pozbądźmy się więc nici i zapytajmy – jak poprzednio – o miseczkę, którą kulka na każdej wysokości obiegałaby w takim samym czasie.



Rys. 12.

Pytamy zatem o kształt krzywej osiowosymetrycznej o tej własności, że w każdym jej punkcie rzut na o odcinka prostej normalnej (czyli przecinającej krzywą pod kątem prostym) od tego punktu do osi symetrii byłby tej samej długości. Poszukiwaną krzywą jest parabola. Styczna do paraboli $x^2 = py$ (rys. 12) w punkcie (a, b) dana jest równaniem

$$ax = \frac{1}{2}p(y + b).$$

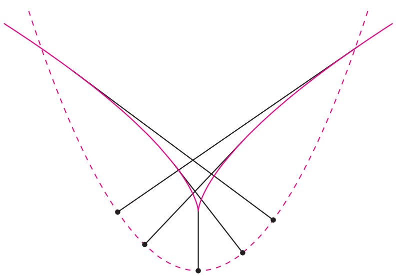
Zatem prostopadła do stycznej ma równanie postaci $\frac{1}{2}px = -ay + A$, a gdy ma przechodzić przez (a, b), musi być $A = a(\frac{1}{2}p + b)$. Prosta ta przecina zatem oś paraboli w punkcie $(0, \frac{1}{2}p + b)$, a więc długość rzutu (czyli $l\cos\alpha$) jest równa

$$(\frac{1}{2}p + b) - b = \frac{1}{2}p.$$

Jak widzimy, ta długość jest stała.

Podobnie jak przy tautochronie, powstaje pytanie, jaki przekrój powinna mieć szpulka, aby rozwijana z niej nić miała swój koniec na paraboli, czyli dla jakiej krzywej parabola jest ewolwentą. Tego nie da się już „pokazać na palcach”, ale popatrzmy na wynik. Jest nim *parabola półsześcienna* zwana inaczej *parabolą Neila*. Parabola $x^2 = py$ jest ewolwentą paraboli półsześciennej o równaniu

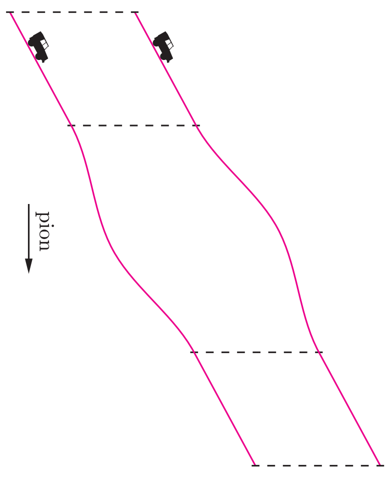
$$x^2 = \frac{2}{27p}(2y - p)^3.$$


Rys. 13.

Inaczej niż w przypadku cykloidy nić tworzącą ewolwentę odwijamy z przeciwnej strony (rys. 13). Różnica polega tutaj również na tym, że kształtki, z których odwijana jest nić, nie mogą być nieruchome. Huygens skonstruował tylko leżącą po jednej stronie osi połowę paraboli półsześciennej, która obracała się razem z nicią.

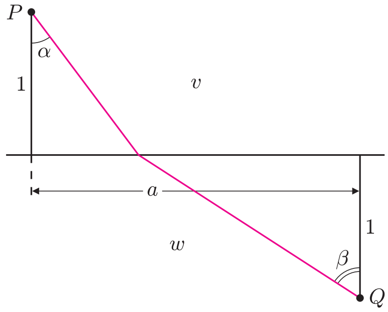
Skonstruowane przez Huygensa zegary nie spełniły jednak wymogów admiralicji na to, by mogły być one zegarami okrętowymi. Ostatecznie wygrał chronometr (sprężynowy) Johna Harrisona, który potrzebował jednak aż 30 lat, by przekonać admiralicję w 1735 roku, że obiecana nagroda mu się należy.

Zostawmy zegary i zajmijmy się najszybszym torem saneczkowym: brachistochroną. Brachistochrona to krzywa, po której czas staczania się masy punktowej od punktu początkowego do punktu końcowego pod wpływem stałej siły (np. siły ciężkości) jest najkrótszy. Nazwa pochodzi od złożenia greckich słów *brachistos* – „najkrótszy” i *chronos* – „czas”. Pytanie o tor, po którym powinna poruszać się kulka, aby jak najszybciej połączyć dwa punkty w przestrzeni, postawił Jakob Bernoulli. W 1696 roku rozesłał on prośbę o rozwiązanie tej zagadki do najwybitniejszych, według jego zdania, matematyków na świecie. Odpowiedziało mu czterech matematyków. Byli to Izaak Newton, Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hôspital i Johann Bernoulli.



Rys. 14.

Zagadka – tor samochodzikowy (rys. 14): oba samochodziki startują z tej samej wysokości, a więc mają takie same energie potencjalne. Podczas ruchu w dół energie potencjalne maleją, a rosną ich energie kinetyczne, czyli te związane z prędkością. Który samochodzik wygra? Lewy, bo jego średnia prędkość będzie większa.



Rys. 15.

Czy istnieje w przyrodzie coś, co porusza się tak, aby czas tego przemieszczenia był najkrótszy? Tym obiektem jest światło. Mamy zatem drugą analogię – zasadę Fermata: promień świetlny poruszając się z jednego punktu do drugiego, wybiera zawsze tę drogę, na której przebycie potrzebuje najmniej czasu. Najprostszym przypadkiem jest załamanie. Czas przejścia impulsu w sytuacji z rysunku 15 to

$$t = \frac{1}{|v|\cos\alpha} + \frac{1}{|w|\cos\beta}.$$

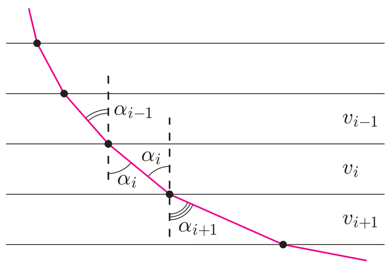
Aby znaleźć minimum, posłużymy się rachunkiem wariacyjnym (łacińskie *vario* – zmieniać, *variatio* – rozmaitość, zmienność). Niech kąty α i β będą funkcjami jakiegoś parametru: $\alpha(u)$ i $\beta(u)$. Nie są one niezależne, bowiem z rysunku mamy $\operatorname{tg}\alpha(u) = a - \operatorname{tg}\beta(u)$. Zatem $\dfrac{\alpha'}{\cos^2\alpha} = \dfrac{-\beta'}{\cos^2\beta}$, co pozwala na obliczenie pochodnej t :

$$t' = \frac{\alpha'\sin\alpha}{|v|\cos^2\alpha} + \frac{\beta'\sin\beta}{|w|\cos^2\beta} = \frac{\alpha'}{\cos^2\alpha}\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{|v|} - \frac{\sin\beta}{|w|}\right).$$

Skoro

$$t' = \frac{\alpha'}{\cos^2\alpha}\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{|v|} - \frac{\sin\beta}{|w|}\right),$$

więc mimimalny czas zostanie uzyskany, gdy $t' = 0$, czyli $\dfrac{\sin\alpha}{|v|} = \dfrac{\sin\beta}{|w|}$, co jest oczekiwaną zasadą załamania (czyli prawem Snelliusa).



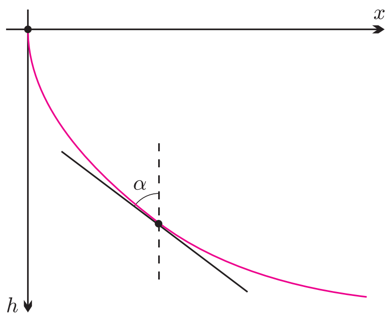
Rys. 16.

Johann Bernoulli stworzył z tego model brachistochrony (rys. 16), w którym zachodzi

$$\frac{\sin\alpha_i}{|v_i|} = \text{const.},$$

czyli po uciągleniu (rys. 17)

$$\frac{\sin\alpha}{|v|} = \text{const.}$$



Rys. 17.

Znów przywołamy z fizyki zasadę zachowania energii

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad \text{czyli} \quad |v| = \sqrt{2gh}.$$

Mamy więc

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2gh(\alpha)}} = \text{const}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin^2\alpha}{h(\alpha)} = \text{const}.$$

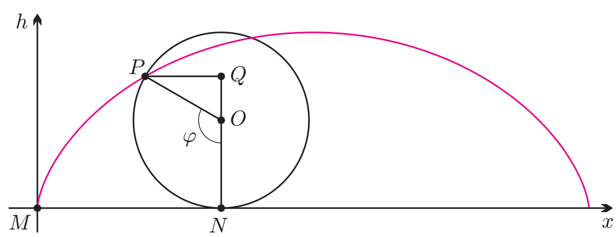
Tę ostatnią stałą wygodnie będzie oznaczać $1/(2r)$. Poszukujemy więc krzywej, dla której $h(\alpha) = 2r\sin^2\alpha = r(1-\cos 2\alpha)$. Aby znaleźć $x(\alpha)$, wykorzystamy geometryczny sens pochodnej: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}h = \operatorname{tg}\alpha$. Daje to następujący rezultat:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cdot 2r\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 4r\sin^2\alpha = 2r(1-\cos 2\alpha).$$

Funkcją, która ma taką pochodną, jest $x = r(2\alpha - \sin 2\alpha)$. W obu wzorach na współrzędne występuje tylko kąt 2α, który oznaczymy przez φ i otrzymamy

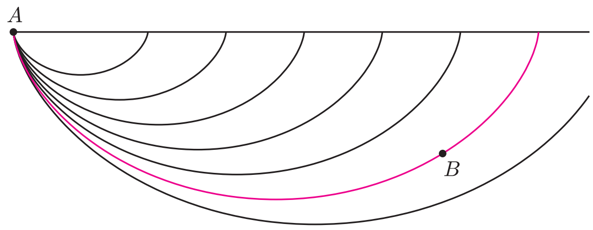
$$(x,\, h) = r(\varphi - \sin\varphi,\ 1-\cos\varphi).$$

Co to za krzywa? Rysunek 18 pokazuje, że jest to cykloida – tym razem o h została skierowana do góry ($PQ = \sin\varphi, OQ = -\cos\varphi$).



Rys. 18.

Kolejny rysunek pokazuje, jak dla danych punktów na stoku wybrać najszybszy – cykloidalny tor saneczkowy (dwa zadane punkty łączy tylko jedna cykloida).

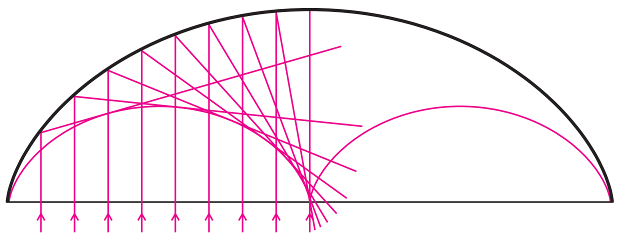


Rys. 19.

Można to zrobić następująco (rys. 19): rysujemy cykloidę zakreślaną przez okrąg o promieniu 1. Cykloida ta przetnie prostą AB w jakimś punkcie P. Szukaną cykloidą jest cykloida, którą zatoczy okrąg o promieniu r równym $\frac{AB}{AP}$.

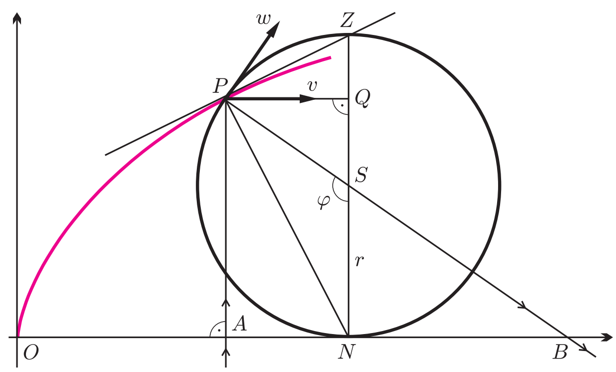
Należy pamiętać, że cykloida jest jedną z brachistochron, dla której zakłada się brak tarcia i oporów ruchu, a jedynym polem sił jest jednorodne pole grawitacyjne.

Kolejny problem to *kaustyka* – wzmocnienie światła w pewnych obszarach po wysłaniu wiązki promieni równoległych na jakiś układ optyczny. *Katakaustyka* to kaustyka powstała jedynie w wyniku odbicia. William Hamilton – wykorzystując przedstawienie parametryczne cykloidy – odkrył, że jedna z katakaustyk cykloidy to dwie mniejsze cykloidy. Powstają one, gdy cykloidę oświetlić równoległą wiązką światła od dołu (rys. 20).



Rys. 20.

Rozważmy sytuację, gdy okrąg przetoczył się o kąt φ (rys. 21).

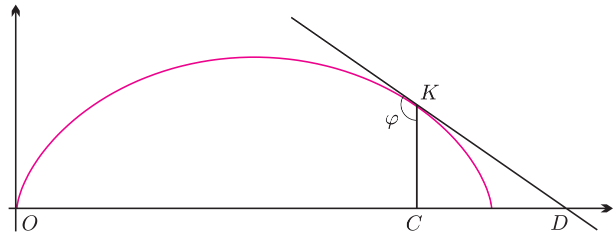


Rys. 21.

Dalej przyda się informacja, że kąt jaki tworzy styczna do cykloidy z pionem to połowa kąta, o który przetoczył się okrąg – na rysunku 21 $\measuredangle PSN = 2 \cdot \measuredangle PZS$. Ponieważ $AP \parallel NZ$ oraz $PS = NS = ZS$, więc $\measuredangle SPZ = \measuredangle SZP = \dfrac{\varphi}{2}$ i $\measuredangle APN = \measuredangle PNS = \measuredangle NPS$, a skoro $PN \perp PZ$, to pionowy promień po odbiciu przechodzi zawsze przez środek toczącego się okręgu. Pozwala to obliczyć, gdzie trafia w prostą, po której okrąg się toczy:

$$OB = ON + NB = r\varphi + r\,\mathrm{tg}\,(\pi - \varphi) = r\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Gdy duża cykloida opisana jest przez $(x,\, h) = r(\alpha - \sin\alpha,\ 1 - \cos\alpha)$, małą opisuje $\dfrac{r}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha,\ 1 - \cos 2\alpha)$. Rysujemy prostą równoległą do PS z rysunku 21, a więc taką, której odpowiada w małej cykloidzie parametr 2φ.



Rys. 22.

Zatem $OC = \frac{r}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi)$, i $CK = \frac{r}{2}(1 - \cos 2\varphi)$. Stąd (rys. 22)

$$\begin{aligned}
OD &= OC + CD = OC + CK \operatorname{tg} \measuredangle CKD = \\
&= \frac{r}{2} \cdot 2\varphi - \frac{r}{2} \sin 2\varphi + \frac{r}{2}(1 - \cos 2\varphi) \operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \\
&= r\varphi - \frac{r}{2} \sin 2\varphi - \frac{r}{2}(1 - \cos 2\varphi) \operatorname{tg} \varphi = \\
&= r\varphi - r \sin\varphi \cos\varphi - \frac{r}{2}(2 - 2\cos^2\varphi) \operatorname{tg}\varphi = \\
&= r\varphi - r \sin\varphi \cos\varphi - r \operatorname{tg}\varphi + r \cos^2\varphi \operatorname{tg}\varphi = r\varphi - r \operatorname{tg}\varphi = OB.
\end{aligned}$$

Tak więc katakaustyką cykloidy są dwie mniejsze cykloidy.